8-mavzu: Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Boshlang'ich shartlar. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema

Reja:

1)Yuqori tartibli differensial tenglamalar.

2)Boshlang'ich shartlar.

3)Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema

4)Misollar yechish

n-tartibli differensial tenglamani

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishda yoki agar buni n-tartibli hosilaga nisbatan yecha olsak,

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (1')$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Teorema. Agar

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

tenglamada $f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$ funksiya va uning $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ argumentglari bo'yicha olingan xususiy hosilalari

$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_n, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ qiymatlarni o'z ichiga olgan biror sohadagi uzluksiz funksiyalardan iborat bo'lsa, bu holda tenglamaning

$$\begin{cases} y_{(x=x_0)} = y_0, \\ y'_{x=x_0} = y'_0, \\ y''_{x=x_0} = y''_0, \\ \dots\dots\dots\dots.. \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (2)$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi y= $y(x)$ yechim mavjud va u bitta bo'ladi. (2) shartlar boshlang'ich shartlar deb ataladi.

Agar ikkinchi tartibli $y'' = f(x_1, y, y')$ tenglamani olsak, $x = x_0$ bo'lganda

$$y = y_0, y' = y'_0$$

Shartlar boshlang'ich shartlar bo'ladi, bunda x_0,y_0, y'_0 ma'lum bir sonlardir. Bu shartlarning geometrik ma'nosi quyidagicha: tekislikning ma'lum (x_0, y_0) nuqtasidan birgina egri chiziq o'tadi, bu chiziqqa shu nuqtada o'tkazilgan urinma og'malik burchagining tangensi berilgan y_0 ga teng bo'ladi. Bundan x_0 va y_0 o'zgarmas bo'lganda, y_0' ga turli qiymatlar berib, shu nuqtadan o'tadigan og'malik burchaklari turlicha bo'lgan cheksiz ko'p integral chiziqlar to'plamini hosil qilamiz, degan natija kelib chiqadi.

Endi n – tartibli tenglama umumiy yechimi haqida tushuncha kiritamiz.

Ta'rif. n – tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb n ta C_1,C_2, …, C_n ixtiyoriy o'zgarmas miqdorga bog'liq bo'lgan

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$

funksiyaga aytamizki, bu funksiya:

a) C_1,C_2, …, C_n ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarning har qanday qiymatlarida ham tenglamani qanoatlantiradi;

b)
$$y_{(x=x_0)} = y_0,$$
$$y'_{x=x_0} = y'_0,$$
$$y''_{x=x_0} = y''_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

boshlang'ich shartlar har qanday bo'lganda ham C_1,C_2, …, C_n o'zgarmas miqdorlarni shunday tanlab olish mumkinki, $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ funksiya bu boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan bo'ladi (bunda $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich qiymatlar yechimning mavjudligi haqidagi teoremaning shartlari bajariladigan sohaga tegishli, deb faraz qilinadi).

Umumiy yechimni oshkormas holda aniqlovchi $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0$ ko'rinishdagi munosabat differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

Umumiy yechimdan C_1,C_2, …, C_n o'zgarmas miqdorlarning tayin qiymatlarida hosil bo'ladigan har qanday funksiya xususiy yechim deb ataladi. Xususiy yechimning grafigi berilgan differensial tenglamaning integral egri chizig'I deyiladi.

n-tartibli differensial tenglamani yechish (integrallash) deganda:

1) Uning umumiy yechimini (agar boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa) topishni yoki
2) Berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi(agar bunda boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa) xususiy yechimni topishni tushinish kerak.

Endi n-tartibli turli differensial tenglamalarni yechish metodlarini qaraymiz.

$y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi tenglama

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (1)$$

Koʻrinishdagi tenglama eng sodda n-tartibli tenglama boʻladi.

Bu tenglamaning umumiy integralini topamiz.

Tenglamaning oʻng va chap tomonini x boʻyicha integrallab va $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ ekanini e'tiborga olib,

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

Ifodani hosil qilamiz, bunda x_0 x ning tayinlangan har qanday qiymati, C_1 esa integrallash oʻzgarmasi.

Yana bir marta integrallaymiz:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \right) dx + C_1 \,(x - x_0) + C_2$$

Integrallashni shunday davom ettirib, nihoyat (n marta integrallashdan keyin) umumiy integralning

$$y = \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx \dots dx + \frac{C_1 (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n$$

ifodasini hosil qilamiz.

$$y_{x=x_0} = y_0; \;\; y'_{x=x_0} = y'_0; \dots ; y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toppish uchun

$$C_n = y_0, \qquad C_{n-1} = y'_0, \dots, C_1 = y_0^{(n-1)}$$

deb olish yetarlidir.

1-misol.

$$y'' = \sin(kx)$$

tenglamaning umumiy integrali va uning

$$y_{x=0} = 0, \qquad y'_{x=0} = 1$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish.

$$y' = \int_0^x sinkxdx + C_1 = -\frac{coskx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{coskx - 1}{k}\right) dx + \int_0^x C_1 dx + C_2$$

ya'ni

$$y = -\frac{sinkx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Bu tenglamaning umumiy integralidir. Berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topish uchun C_1 va C_2 larning mos qiymatlarini topish yetarlidir.

$y_{x=0} = 0$ shartdan $C_2 = 0$ ekanini topamiz.

$y_{x=0} = 1$ shartdan $C_1 = 1$ ekanini topamiz.

Shunday qilib izlanayotgan xususiy yechim

$$y = -\frac{sinkx}{k^2} + x(\frac{1}{k} + 1).$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bunday differensial tenglamalar balkalar egilishi nazariyasida uchrab turadi.

2-misol. Tekis taqsimlangan (yuk, nagruzka) va to'plangan tashqi kuchlar ta'siri ostida egiluvchi elastik prizmatik balkani qaraymiz, Ox o'qni balkaning deformatsiyalangan holatidagi o'qi bo'ylab gorizantal, Oy o'qni esa pastga vertikal yunaltiramiz.

Balkaga ta'sir etuvchi har bir kuch (masalan, balkaning og'irligi, tayanch reaksiyasi) balkaning biror kundalang kesimiga nisbatan berilgan kesimdan kuch qo'yilgan nuqtagacha masofa bilan shu kuchning ko'paytmasiga teng bo'lgan momentga egadir. Berilgan kesimning bir tomoniga joylashgan to'sinning x absissali qismiga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning $M(x)$ momentlari yig'indisi balkaning bergan kesimiga nisbatan eguvchi momenti deyiladi. Materiallar qarshiligi kursida balkaning eguvchi momenti $\frac{EJ}{R}$ ga teng ekani isbot etiladi, bunda E-balkaning materialiga bog'liq bo'lgan elastiklik moduli; J- esa kundalang kesim yuzining og'irlik markazi orqali o'tuvchi gorizantal chiziqqa nisbatan olingan balka kundalang kesimi yuzining inersiya momenti; R-egilgan balka o'qining egrilik radiusi bo'lib, bu

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}$$

formula bilan ifodalanadi.

Shunday qilib, balkaning egilgan o'qining differensial tenglamasi

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ} \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar diformatsiyani kichik deb va egilish vaqtida balka o'qiga o'tkazilgan urinmalar Ox o'q bilan juda kichik burchak tashkil qiladi desak, bu holda kichik miqdorning $(y')^2$ kvadratini e'tiborga olmasdan

$$R = \frac{1}{y''}$$

deb yozishimiz mumkin.

Bu holda egilgan balkaning differensial tenglamasi

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ} \qquad (2')$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu esa (1) ko'rinishdagi tenglamadir.

3-misol. Balkaning O uchi qo'zg'almaydigan qilib mahkamlangan. Balkaning mahkamlangan uchidan l masofada ikkinchi uchi L ga to'plangan vertikal P kuch ta'sir qiladi. Balka og'irligini e'tiborga olmaymiz.

$N(x)$ nuqtadagi kesmani qaraymiz. Bu masalada N kesimga nisbatan egiluvchi moment

$$M(x) = (l - x)P$$

bo'ladi. $(2')$differensial tenglama

$$y'' = \frac{(l - x)P}{EJ}$$

ko'rinishni oladi. Boshlang'ich shartlar: $x = 0$ bo'lganda y egilish oralig'i nolga teng va balkaning egilgan o'qiga o'tkazilgan o'rinma Ox o'q bilan bir xil, ya'ni:

$$y_{x=0} = 0, y'_{x=0} = 0.$$

Tenglamani integrallab,

$$y' = \frac{P}{EJ}\int_0^x (l - x)dx = \frac{P}{EJ}(lx - \frac{x^2}{2}); \quad y = \frac{P}{2EJ}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \qquad (3)$$

Ekanini topamiz. Xususiy holda (3) formuladan balkaning L uchidagi h egilish oralig'I aniqlanadi:

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$