10-mavzu: n-tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Vronskiy determenanti. Fundamental yechimlar sistemasi.

Reja:

1)n-tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

2)Vronskiy determenanti.

3)Fundamental yechimlar sistemasi.

n-tartibli chiziqli differensial tenglamalar

1. Ta’rif

n-tartibli chiziqli differensial tenglama quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

bu yerda:

$y^{(k)} — y(x)$

funksiyaning k-tartibli hosilasi,

$a_i(x)$

berilgan koeffitsient funksiyalar,

f(x) — berilgan funksiya (agar f(x)≡0 bo‘lsa, tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli bo‘lmagan).

2.Maxsus ko‘rinish: o‘zgarmas koeffitsientli tenglama

Agar barcha $a_i(x)$ lar doimiy son bo‘lsa

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

3. Bir jinsli tenglama yechimi

Bir jinsli tenglama:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

uchun xarakteristik tenglama tuziladi:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Agar ildizlar haqiqiy va turli bo‘lsa:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

Agar ildizlar karrali bo‘lsa:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + \dots) e^{\lambda x}$$

Agar ildizlar kompleks bo‘lsa:

$$y(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x), \quad \lambda = \alpha \pm i\beta$$

4.Bir jinsli bo‘lmagan tenglama yechimi

Umumiy yechim:

$$y(x) = y_{\text{umumiy}} + y_{\text{xususiy}}$$

5. Misollar

1-misol.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Xarakteristik tenglama:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

Yechim:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

2-misol.

$$y'' + y = \sin x$$

Bir jinsli yechim:

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Xususiy yechim (tajriba usuli):

$$y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$$

Umumiy yechim:

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x$$

6. Fizik talqin

- 2-tartibli tenglamalar odatda **tebranish jarayonlari**ni ifodalaydi (prujina, elektr kontur).
- Yuqori tartibli tenglamalar **murakkab tizimlarni** modellashtiradi (mexanik tizimlar, elektr zanjirlar).

Vronskiy determenanti

1. Ta’rif

Aytaylik, bizda nnn-tartibli chiziqli differensial tenglama uchun nnn ta yechim mavjud:

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

Shunda Vronskiy determinanti quyidagicha aniqlanadi:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

2.Ahamiyati

Agar

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$$

bo‘lsa, demak yechimlar chiziqli bog‘liqmas.

Agar

$$W(x) = 0$$

bo‘lsa, yechimlar chiziqli bog‘liq.

Bu shuni anglatadiki, differensial tenglama uchun umumiy yechimni tuzishda Vronskiy determinant yordam beradi.

3. Misollar

1-misol

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}$$

Vronskiy determinant:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2$$

Yechimlar chiziqli bog’liqmas.

2-misol

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 2x$$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0$$

Yechimlar chiziqli bog‘liq.

4. Fizik talqin

- Prujina–og‘irlik sistemasida yechimlarning mustaqilligi shuni bildiradiki, har qanday boshlang‘ich shartlar to‘plami uchun yechimni Vronskiy determinant yordamida tekshirish mumkin.
- Elektr zanjirlarida ham yechimlarning mustaqilligi tizimni to‘liq ifodalash uchun muhim.

Fundamental yechimlar sistemasi

Maqsad

Talabalarga fundamental yechimlar sistemasi tushunchasini, uning differensial tenglamalar sistemasini yechishda ahamiyatini, Vronskiy determinant bilan bog‘liqligini tushuntirish.

1. 🔍 Ta’rif

Chiziqli differensial tenglamalar sistemasini olaylik:

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t),$$

bu yerda

- X(t) – n-o‘lchamli vektor-funksiya,
- A – doimiy matritsa.

Fundamental yechimlar sistemasi — bu nnn ta **chiziqli mustaqil yechimlardan** tuzilgan sistemadir.

2. Matritsali yozilish

Agar

$$\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t)$$

yechimlar bo‘lsa, ulardan quyidagi matritsa tuziladi:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) & \mathbf{X}_2(t) & \ldots & \mathbf{X}_n(t) \end{bmatrix}$$

Bu matritsa **fundamental matritsa** deyiladi.

3. Xossalar

Agar $\det \Phi(t_0) \neq 0$ bo‘lsa, Φ(t) fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi.

 Fundamental yechimlar sistemasining har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham yechimdir.

 Umumiy yechim:

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$$

bu yerda C — o‘zgarmas vektor.

4. Vronskiy bilan bog‘lanishi

- W(t)=det⁡Φ(t) — bu **Wronskiy determinanti**.

Agar $W(t_0) \neq 0$ demak yechimlar chiziqli mustaqil.

 Fundamental yechimlar sistemasi aynan shunday mustaqil yechimlardan tuziladi.

5. Misol

Misol 1.

Sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = -y(t) \end{cases}$$

Yechimlar:

$$x(t) = C_1 e^{2t}, \quad y(t) = C_2 e^{-t}$$

Fundamental sistemani tuzamiz:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Wronskiy:

$$W(t) = \det \Phi(t) = e^{2t} \cdot e^{-t} = e^{t} \neq 0$$

Demak, bu fundamental yechimlar sistemasi.

Misol 2.

Tenglama:

$$y'' - y = 0$$

Yechimlar:

$$y_1(t) = e^{t}, \quad y_2(t) = e^{-t}$$

Fundamental matritsa

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Wronskiy:

$$W(t) = \det \Phi(t) = -2 \neq 0$$

Demak, bu ham fundamental sistema

6. Fizik talqin

- Mexanik sistemalarda fundamental yechimlar — turli boshlang‘ich shartlardagi tebranishlar.
- Elektr zanjirlarda fundamental yechimlar — tok va kuchlanishning asosiy mustaqil yechimlari.

Nazorat savollari

1. n-tartibli differensial tenglama umumiy ko‘rinishini yozing.
2. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning farqini tushuntiring.
3. Xarakteristik tenglama qanday tuziladi?
4. Kompleks ildizli xarakteristik tenglama yechimi qanday bo‘ladi?
5. Xususiy yechimni topish usullarini sanab bering.
6. Vronskiy determinantining umumiy ko‘rinishini yozing.
7. Vronskiy determinant nol bo‘lsa, bu nimani bildiradi?
8. Vronskiy determinant differensial tenglamaning umumiy yechimida qanday ahamiyatga ega?
9. Vronskiy determinant qaysi hollarda doimo nolga teng bo‘ladi
10. Fundamental yechimlar sistemasining ta’rifini ayting.
11. U qanday shartda fundamental sistema bo‘ladi?
12. Vronskiy determinant bilan bog‘liqligini tushuntiring.
13. Fundamental matritsa qanday tuziladi?
14. Umumiy yechimni fundamental matritsa orqali yozing.