

11-mavzu: O'zgaras koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar

Reja:

1. O'zgaras koeffitsientli differensial tenglamalar tushunchasi
2. Bir jinsli tenglama va umumiy yechim
3. Bir jinsli bo'lmagan tenglamani yechish usullari
4. Xususiy hollar: sinus, kosinus, ko'paytuvchili tenglamalar
5. Amaliy misollar va fizik modellar

1. O'zgaras koeffitsientli differensial tenglamalar tushunchasi

Chiziqli differensial tenglama umumiy ko'rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

bu yerda:

- $y^{(k)}$ — k-tartibli hosila,
- a_0, a_1, \dots, a_n — o'zgaras koeffitsientlar (doimiy sonlar),
- $f(x)$ — berilgan funksiya (agar $f(x)=0$ bo'lsa, tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli bo'lmagan deyiladi).

2. Bir jinsli tenglama va umumiy yechim

Agar $f(x)=0$ bo'lsa, tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Yechish usuli: Quyidagi xarakteristik tenglama tuziladi:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Bu algebraik tenglamaning ildizlariga qarab umumiy yechim topiladi.

Ildizlarga qarab umumiy yechim turlari:

1. Turli haqiqiy ildizlar:

$$r_1, r_2, \dots, r_n \Rightarrow y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

Takroriy ildizlar (multiplikatsiya marta):

Agar r - marta takrorlangan ildiz bo'lsa:

$$y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_mx^{m-1})e^{rx}$$

Kompleks ildizlar:

Agar $r = \alpha \pm i\beta$ bo'lsa:

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Nojinsli tenglamani yechish usullari

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Bu holda yechim quyidagicha bo'ladi:

$$y(x) = y_{\text{umumiy}} + y_{\text{xususiy}}$$

- y_{umumiy} : bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi
- y_{xususiy} : berilgan $f(x)$ ga mos **xususiy yechim**.

Xususiy yechimni topish usullari:

- Variatsiya usuli
- Noaniq koeffitsientlar usuli

Xususiy hollar

Agar $f(x)$ quyidagi ko'rinishlarda bo'lsa:

- $f(x) = P_n(x)$ — polinom (masalan: $x^2 + 3x$)
- $f(x) = e^{ax}, \sin(bx), \cos(bx)$
- Yoki ularning ko'paytmasi (masalan: $xe^x, \cos x \cdot x$)

bu holda xususiy yechimni topishda tajriba funksiyasi tanlanadi va unga noma'lum koeffitsientlar kiritiladi.

5. Amaliy misollar va fizik modellar

Misol 1:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Yechish:

Xarakteristik tenglama:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 2$$

Umumiy yechim:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Misol 2:

$$y'' + y = \cos x$$

Umumiy yechim: bir jinsli tenglama uchun:

$$y'' + y = 0 \Rightarrow y_{\text{umumiy}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Xususiy yechim: tajriba qilamiz:

$$y_{\text{xususiy}} = x \sin x \Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$$

Fizik qo'llanilish:

- Tezlik va siljish orasidagi bog'lanish (massa-prujina modeli)
- Elektr zanjirlar (RLC konturlar)
- Issiqlik tarqalishi va to'lqinlar tenglamasi soddalashtirilgan holatlarda

Topshiriqlar:

1. Quyidagi tenglamalarni umumiy holda yeching:

- $y'' - 5y' + 6y = 0$
- $y'' + 4y = \cos 2x$
- $y'' + y' = x^2$

2. Massasi m , prujina qattiqligi k bo'lgan sistemaning tebranish differensial tenglamasini yozing va yeching.

Nazorat savollari:

1. O'zgarmas koeffitsientli differensial tenglama deganda nimani tushunasiz?
2. Xarakteristik tenglama qanday tuziladi?
3. Kompleks ildizli tenglama yechimi qanday bo'ladi?
4. Xususiy yechim qanday topiladi?
5. Sinus va eksponensialli funksiya bilan berilgan $f(x)$ holatlari qanday yechiladi?