

12-mavzu: Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sistemasi

Reja:

- 1) Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.
- 2) Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar sistemasi
- 3) Misollar

Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

Maqsad

Talabalarga chiziqli differensial tenglamalar sistemasi tushunchasini, ularning umumiy ko‘rinishini, yechish usullarini va fizik talqinlarini o‘rgatish.

1. Ta’rif

Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi quyidagi umumiy ko‘rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

Matritsali yozilishi:

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t)$$

- $X(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — noma’lum funksiya vektori,
- $A(t)$ — koeffitsientlar matritsasi,
- $F(t)$ — erkin had (agar $F(t) \equiv 0$ bo‘lsa, sistema bir jinsli).

2. Bir jinsli sistema

$$X'(t) = AX(t)$$

Umumiy yechim fundamental yechimlar sistemasi orqali yoziladi:

$$X(t) = \Phi(t)C$$

bu yerda $\Phi(t)$ — fundamental matritsa, C — o'zgarmas vektor.

3. Bir jinsli bo'lmagan sistema

$$X'(t) = AX(t) + F(t)$$

Umumiy yechim:

$$X(t) = X_{\text{umumiy}}(t) + X_{\text{xususiy}}(t)$$

4. Misollar

Misol 1.

Sistema:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

Matritsa ko'rinishi:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X$$

Xarakteristik tenglama:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

Umumiy yechim:

$$x(t) = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad y(t) = e^t(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$$

Misol 2.

Sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \end{cases}$$

Yechim:

$$x(t) = C_1 e^{2t}, \quad y(t) = C_2 e^{-t}$$

5. Fizik talqin

- Mexanik tizimlarda: prujina–massalar tizimi harakati.
- Elektr zanjirlarda: RLC konturdagi tok va kuchlanish tenglamalari.
- Populyatsiya dinamikasida: ikki yoki undan ortiq turdagi biologik populyatsiyalar o‘zaro ta’siri.

Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sistemasi

1) Ta’rif va matritsali yozuv

Umumiy ko‘rinish (1-tartibli $n \times n$ sistema):

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \quad X(t) \in \mathbb{R}^n, \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad F(t) \in \mathbb{R}^n.$$

- $F(t) \neq 0 \rightarrow$ bir jinsli bo‘lmagan sistema.
- Agar $F(t) \equiv 0$ bo‘lsa \rightarrow bir jinsli: $X'(t) = A(t)X(t)$.

2) Umumiy tuzilma

Bir jinsli bo‘lmagan sistemaning yechimi:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

- $X_h(t)$: mos bir jinsli sistema $X' = AX$ ning umumiy yechimi.
- $X_p(t)$: bir jinsli bo‘lmagan qismga mos xususiy yechim.

3) Bir jinsli qism: fundamental matritsa

Bir jinsli sistema $X' = A(t)X$ uchun fundamental yechimlar sistemasidan tuzilgan matritsa $\Phi(t)$ (Wronskiy $\det \Phi(t) \neq 0$):

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = I.$$

Har qanday yechim:

4) Bir jinsli bo‘lmagan qismni topish usullari

4.1) Variation of Parameters (parametrlarga bog‘liq o‘zgarish

$$X_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) F(s) ds$$

Shu bilan boshlang'ich shartli yechim:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) F(s) ds$$

4.2) Aniqlanmagan koeffitsientlar usuli (faqat A — doimiy va F — “oddiy” shaklda)

F(t) — polinom/eksponensial/trigonometrik kombinatsiya bo'lsa, X_p uchun shu ko'rinishga o'xshash ansatz tanlanadi.

Rezonans ko'rinishi bir jinsli yechimdagi eksponent/trigonometriya bilan mos kelsa, ansatz t ga ko'paytiriladi (masalan, $e^{\lambda t}$ o'z qiymat bo'lsa $te^{\lambda t}$)

4.3) Yashil funksiyasi (Green's function) (qisqacha)

Doimiy A da e^{At} mavjud bo'lsa:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}F(s) ds.$$

5) Fizik talqin (qisqacha)

- RLC zanjir: $X = [q \ i]^T$ (zaryad, tok) $\rightarrow X' = AX + F(t)$.
- Prujina–massa–dempfer: 2-tartibli tenglama 1-tartibli sistemaga keltiriladi ($X = [x \ v]^T$).
- X_h : ozod javob (ichki dinamik), X_p : majburiy javob (tashqi kuchga javob).
- Turg'unlik: A o'z qiymatlari $\text{Re } \lambda_i < 0$ bo'lsa — ozod javob so'nadi, tizim turg'un.

6) To'liq ishlangan misol (doimiy A)

$$\begin{cases} x' = x + y + e^t, \\ y' = 2x + y, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6.1) Bir jinsli qism $X' = AX$

Xarakteristik tenglama:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

O'z vektorlar:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$X_h(t) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

6.2) Xususiy yechim (aniqlanmagan koeffitsientlar)

Forcing e^t ning eksponenti $\lambda=1$ bo'lib, bu A ning o'z qiymatlari 1 ± 2 dan farq qiladi \rightarrow rezonans yo'q. Shuning uchun

$$X_p(t) = u e^t, \quad u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ (doimiy).}$$

$$X_p' = u e^t, \quad u = Au + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff (I - A)u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad I - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Tizim: } -b = 1 \Rightarrow b = -1, \quad -2a = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$X_p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

6.3) To'liq yechim

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}, \\ y(t) = \sqrt{2} C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} - \sqrt{2} C_2 e^{(1-\sqrt{2})t} - e^t. \end{cases}$$

6.4) Boshlang'ich shart bilan (namuna)

Agar $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ berilsa:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2, \\ y_0 = \sqrt{2} C_1 - \sqrt{2} C_2 - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{y_0+1}{\sqrt{2}} \right), \\ C_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{y_0+1}{\sqrt{2}} \right). \end{cases}$$

Nazorat savollari

1. Chizikli differensial tenglamalar sistemasining umumiy ko‘rinishini yozing.
2. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan sistemaning farqi nimada?
3. Fundamental matritsa nima va u qanday tuziladi?
4. Umumiy yechim qanday yoziladi?
5. Fizikadan bitta misol keltiring.