

14-mavzu: Turg'unlik nazariyasi. Lyapunov ma'nosida turg'unlik. Asimptotik turg'unlik haqidagi teoremlar

Reja

1. Turg'unlik tushunchasi va uning ahamiyati.
2. Dinamik sistemalarda muvozanat nuqtasi.
3. Lyapunov ma'nosida turg'unlik ta'rifi.
4. Turg'unlikning uch xil ko'rinishi: oddiy turg'unlik, Lyapunov turg'unligi, asimptotik turg'unlik.
5. Lyapunov funksiyasi va uning xossalari.
6. Misollar va amaliy qo'llanmalar.
7. Nazorat savollari va topshiriqlar.

1. Asimptotik turg'unlik tushunchasi

Muvozanat nuqtasi $x=0$ asimptotik turg'un deyiladi, agar:

- u Lyapunov ma'nosida turg'un bo'lsa,
- va $t \rightarrow \infty$ da $x(t) \rightarrow 0$ bo'lsa.

Ya'ni, yechim vaqt o'tishi bilan muvozanat nuqtasiga yaqinlashib boradi.

2. Lyapunov teoremlari

Teorema 1 (Lyapunovning birinchi teoremasi)

Chiziqli sistemani qaraymiz:

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Agar matritsaning barcha xos qiymatlarining haqiqiy qismlari manfiy bo'lsa
($\text{Re}(\lambda_i) < 0$),

unda muvozanat nuqtasi asimptotik turg'un bo'ladi.

Bu teorema chiziqli differensial tenglamalar uchun ishlatiladi.

Teorema 2 (Lyapunovning ikkinchi teoremasi)

Umumiy tizim qaraymiz

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0.$$

Agar shunday Lyapunov funksiyasi mavjud bo'lsa:

$$V(x) > 0, V(0) = 0, \text{ (ijobiy aniqlangan)}$$

$$\dot{V}(x) < 0, x \neq 0, \text{ (manfiy aniqlangan)}$$

unda muvozanat nuqtasi asimptotik turg'un bo'ladi.

Bu teorema nochiziqli tizimlar uchun ishlatiladi.

3. Lyapunovning bevosita usuli

Bu usulga ko'ra, differensial tenglama yechimini aniq topish shart emas. Faqat Lyapunov funksiyasi topilib, uning hosilasi tekshiriladi.

Bu usul ayniqsa murakkab fizik sistemalar (masalan, RLC zanjirlar, issiqlik o'tkazuvchanlik, mexanik tebranishlar) uchun juda qulay.

4. Asimptotik turg'unlik uchun shartlar

1. Agar $V'(x) < 0$ bo'lsa – asimptotik turg'unlik.
2. Agar $V'(x) \leq 0$ bo'lsa – faqat turg'unlik (asimptotik emas).
3. Agar $V'(x) > 0$ bo'lsa – tizim turg'un emas.

5. Misollar

Misol 1.

$$\dot{x} = -kx, \quad k > 0$$

Lyapunov funksiyasi:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad V(x) > 0, V(0) = 0$$

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = -kx^2 < 0$$

Demak, $x=0$ asimptotik turg'un.

Misol 2. (Mexanik tizim – prujina va dempfer)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad c > 0$$

Lyapunov funksiyasi sifatida energiya tanlaymiz:

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = -c\dot{x}^2 \leq 0$$

Demak, muvozanat nuqtasi $x=0$ asimptotik turg'un.

6. Nazorat savollari va topshiriqlar

1. Asimptotik turg'unlik ta'rifini ayting.
2. Lyapunovning birinchi teoremasi nima? Qaysi hollarda ishlatiladi?
3. Lyapunovning ikkinchi teoremasini ayting va fizik misol keltiring.
4. Prujina va dempferli mexanik tizim uchun turg'unlikni tekshiring.
5. RLC zanjiridagi tokning asimptotik turg'unligini isbotlang.

14-mavzu amaliy mashg'uloti o'zgaras koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasi uchun turg'unlik nazariyasi

Mashg'ulotning maqsadi:

- Talabalarga chiziqli sistemalar uchun turg'unlikni baholash usullarini o'rgatish.
- Xos qiymatlar (eigenvalue) yordamida turg'unlikni aniqlashni ko'rsatish.
- Fazoviy portretlarni tahlil qilishni amalda qo'llash.

1. Nazariy qism

O'zgaras koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi ko'rinishida beriladi:

$$\dot{X} = AX, \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

- Bu yerda $X(t)$ – yechim vektori,
- A – o'zgaras koeffitsientli matritsa.

Umumiy yechim:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n,$$

- λ_i – matritsaning xos qiymatlari
- v_i – xos vektorlari.

Turg'unlik shartlari

1. Agar barcha xos qiymatlar haqiqiy qismlari **manfiy** bo'lsa: tizim **asimptotik turg'un**.
2. Agar hech bo'lmaganda bitta xos qiymatning haqiqiy qismi **musbat** bo'lsa: tizim **turg'un emas**.

3. Agar barcha haqiqiy qismlar ≤ 0 bo'lsa va hech bo'lmaganda bitta sof mavhum bo'lsa: tizim Lyapunov ma'nosida turg'un, lekin asimptotik emas.

2. Amaliy misollar

Misol 1.

Sistemani qaraymiz:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$$

Matritsa:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Xos qiymatlarni topamiz:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 3) - 1 = \lambda^2 + 5\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ikkala xos qiymat ham manfiy.

Demak, muvozanat nuqtasi asimptotik turg'un.

Misol 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Matritsa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Xos qiymatlar:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Bu sof mavhum ildizlar.

☞ Sistema turg'un (Lyapunov ma'nosida), lekin asimptotik emas (doimiy tebranish).

Misol 3.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

Matritsa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Xos qiymatlar:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 1) + 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Sistema turg'un emas.

3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi sistemaning turg'unlik holatini aniqlang:

$$\dot{x} = -3x + 4y, \quad \dot{y} = -4x - 3y.$$

2. Fazoviy portretini chizing:

$$\dot{x} = x + 2y, \quad \dot{y} = -2x + y.$$

4. Nazorat savollari

1. Turg'unlik ta'rifi va shartlarini ayting.
2. O'zgarmas koeffitsientli sistemalar uchun umumiy yechim qanday yoziladi?
3. Xos qiymatlar orqali turg'unlikni qanday aniqlash mumkin?
4. Lyapunov ma'nosida turg'unlik va asimptotik turg'unlik orasidagi farqni tushuntiring.