

15-mavzu: Xususiy hosilali birinchi tartibli chiziqli tenglama va uning umumiy yechimi. Xususiy hosilali kvazichiziqli birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Reja

1. Xususiy hosilali tenglamalarga kirish.
2. Birinchi tartibli xususiy hosilali chiziqli tenglama.
3. Xarakteristiklar usuli.
4. Umumiy yechim formulasi.
5. Fizik misollar.
6. Nazorat savollari va topshiriqlar.

1. Xususiy hosilali tenglamalarga kirish

Xususiy hosilali tenglama (XHT) – bu noma'lum funksiya bir nechta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lib, uning hosilalari ishtirok etadigan tenglama.

Masalan, $u(x,t)$ – vaqt va koordinataga bog'liq fizik kattalik (issiqlik harorati, to'lqin, zaryad zichligi va h.k.).

2. Birinchi tartibli xususiy hosilali chiziqli tenglama

Umumiy ko'rinishi:

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u),$$

bu yerda:

- $u(x,y)$ – noma'lum funksiya,
- $a(x,y), b(x,y), c(x,y,u)$ – berilgan funksiyalar.

Agar c funksiyasi uuu ga **chiziqli** bo'lsa, ya'ni

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha(x, y)u + \beta(x, y),$$

unda bu birinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali tenglama deyiladi.

3. Xarakteristiklar usuli

Yechimni topishda xarakteristikalar usuli qo'llaniladi.

Buning uchun yordamchi differensial tenglamalar sistemasi tuziladi:

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y), \quad \frac{du}{ds} = \alpha(x, y)u + \beta(x, y).$$

Bu sistemaning yechimi $x(s), y(s), u(s)$ xarakteristik chiziqlarni beradi.

4. Umumiy yechim formulasi

Chiziqli hol uchun umumiy yechim quyidagicha yoziladi:

$$u(x, y) = \varphi(\xi) e^{\int \alpha ds} + \int \beta(x, y) e^{\int \alpha ds} ds,$$

bu yerda ξ – xarakteristik invariant.

Agar $\alpha=0, \beta=0$ bo'lsa, ya'ni gomogen holda:

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

unda umumiy yechim

$u(x, y) = F(\xi), \xi = \text{konstanta}$ bo'yicha xarakteristik kombinatsiya.

5. Fizik misollar

Misol 1. Transport tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{konstanta.}$$

Xarakteristik tenglama:

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow x - ct = \text{konst.}$$

umumiy yechim:

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

Bu to'liqin shaklida harakatlanayotgan jarayonni ifodalaydi (masalan, signal uzatilishi).

Misol 2. Issiqlik oqimining soddalashtirilgan modeli

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda u,$$

unda xarakteristika: $x-vt=\xi$.

Umumiy yechim:

$$u(x, t) = f(x - vt)e^{-\lambda t}.$$

Bu issiqlik yoki zaryadning soʻnib boruvchi tarqalishini ifodalaydi.

6. Nazorat savollari va topshiriqlar

1. Xususiy hosilali birinchi tartibli chiziqli tenglama ta'rifini ayting.
2. Xarakteristiklar usuli nimaga asoslanadi?
3. Transport tenglamasining umumiy yechimi qanday yoziladi?