

## 2-Mavzu: O'zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Reja:

- 1) O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar.
- 2) Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar
- 3) Bir jinsli tenglamaga keladigan tenglamalar
- 4) Misollar yechish

### O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar.

O'ng tomoni faqat  $x$  ga bog'liq bo'lgan funksiya bilan faqat  $y$  ga bog'liq bo'lgan funksiyaning ko'paytmasidan iborat bo'lgan

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (1)$$

ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamani qaraylik. Bu tenglamani quyidagicha o'zgartirib ( $f_2(y) \neq 0$  deb faraz qilib) yozamiz:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \quad (1')$$

$y$  ni  $x$  ning ma'lum funksiyasi deb hisoblab (1') tenglikni ikkita differensialning tengligi deb qarash mumkin; ulardan olingan aniqmas integrallar bir-biridan o'zgarmas qo'shiluvchi bilan farq qiladi. (1') tenglikni chap tomonini  $y$  bo'yicha, o'ng tomonini  $x$  bo'yicha integrallasak,

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)dx + C$$

hosil bo'ladi. Biz  $y$  yechim,  $x$  erkli o'zgaruvchi va ixtiyoriy  $C$  o'zgarmas miqdorni bog'lovchi munosabatni, ya'ni (1) tenglamaning umumiy integralini xosil qildik.

1. (1') differensial tenglama tipidagi

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (2)$$

tenglama o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning umumiy integrali yuqorida isbot qilganimizga ko'ra:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

1-misol. O'zgaruvchilari ajralgan

$$xdx + ydy = 0$$

tenglama berilgan.

Buni integrallasak,

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

umumiy integralni hosil qilamiz. Keying tenglikning chap tomoni manfiy bo'lmagani uchun, uning o'ng tomoni ham manfiy emas.  $2C_1$  ni  $C^2$  bilan belgilasak,

$$x^2 + y^2 = C^2$$

Tenglikni hosil qilamiz.

Bu markazi koordinata boshida va radiusi  $C$  bo'lgan konsentrik aylana o'lasining tenglamasidir.

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (3)$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning ikkala tomonini  $M_2(x)N_1(y)$  ifodaga bo'lish yo'li bilan uni o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltirish mumkin:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_1(y)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{M_2(x)N_1(y)}dy = 0$$

yoki

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

ya'ni biz (2) ko'rinishdagi tenglama hosil qildik.

2-misol.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

tenglama berilgan.

O'zgaruvchilarini ajratib, integrallasak:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

ya'ni

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$$

yoki

$$\ln|y| = -\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Tenglik hosil bo‘ladi; bundan  $y = \frac{C}{x}$  umumiy integralni topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{(1+x)}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy &= 0 \\ \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy &= 0. \end{aligned}$$

Munosabatni hosil qilamiz. Keying munosabat berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

4-misol. Ma’lum bo‘lishicha har ber berilgan momentda radiyning yemirilish tezligi uning miqdoriga to‘g‘ri proporsionaldir. Agar  $t=0$  bo‘lganda radiyning massasi  $m_0$  bo‘lsa, radiy massasining vaqtga qarab o‘zgarish qonuni aniqlansin.

Yemirilish tezligi quyidagicha aniqlanadi,  $t$  vaqtda radiyning massasi  $m$ ,  $t + \Delta t$  vaqtda esa  $m + \Delta m$  bo‘lsin,  $\Delta t$  nuqta radiyning  $\Delta m$  qadar massasi yemirilgan bo‘ladi.  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$  nisbat yemirilishning o‘rtacha tezligini bildiradi.  $\Delta t \rightarrow 0$  da bu nisbatning nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

$t$  vaqtda radiyning yemirilish tezligi deyiladi.

Masalaning shartiga ko‘ra

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad (4)$$

bunda  $k$  proporsionallik koeffitsienti ( $k > 0$ ). bu yerda minus ishora vaqt o‘shishi bilan radiyning miqdori kamaygani uchun olindi  $\left(\frac{dm}{dt} < 0\right)$ .

(4) tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dm}{m} = -k dt$$

tenglamani yechamiz:

$$\ln m = -kt - \ln C.$$

Bundan

$$\ln \frac{m}{C} = -kt, \quad m = Ce^{-kt}. \quad (5)$$

$t = 0$  bo'lganda radiyning massasi  $m_0$  bo'lgani uchun  $C$

$$m_0 = Ce^{-k_0} = C$$

Munosabatni qanoatlantirishi kerak.  $C$  ning qiymatini (5) tenglikka qo'yib, radiy massasini vaqtning vaqtning funksiyasi kabi ifodalovchi izlanayotgan munosabatni topamiz:

$$m = m_0 e^{-kt}. \quad (6)$$

$k$  koeffitsient kuzatishlardan quyidagicha aniqlanadi.  $t_0$  aqtd

Shunday qilib, radiy uchun  $k = 0,00044$  ekani aniqlangan edi (vaqtning o'lchov birligi yil hisobida olinadi).  $k$  ning bu qiymatini (6) formulaga qo'ysak,

$$m = m_0 e^{-0,00044t}.$$

Radiyning yarim parchalanish davrini, ya'ni radiyning dastlabki massasining yarmini parchalanishi uchun ketadigan vaqtni topamiz. Keying formulada  $m$  ning o'rniga  $\frac{m_0}{2}$  ni qo'yib, yarim parchalanish davri  $T$  ni toppish uchun tenglama hosil qilamiz:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0,00044T},$$

bundan

$$-0,00044T = -\ln 2,$$

yoki

$$T = \frac{\ln 2}{0,00044} = 1590 \text{ yil}.$$

Izoh.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{yoki} \quad dy = f(x)dx$$

tenglama eng sodda ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamadir. Buning umumiy integrali

$$y = \int f(x)dx + C$$

ko'rinishda bo'ladi.

## Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar

1-ta'rif. Agar  $\lambda$  ning har qanday qiymatida

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

ayniyat o'rinli bo'lsa,  $f(x, y)$  funksiya  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilarga nisbatan  $n$  o'lchovli bir jinsli funksiya deb ataladi.

1-misol.  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$  funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y).$$

2-misol.  $f(x, y) = xy - y^2$  funksiya ikki o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$$(\lambda x) \cdot (\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 [xy - y^2]$$

3-misol.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$  funksiya nol o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$$\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}, \text{ ya'ni } f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \text{ yoki } f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y).$$

2-ta'rif. Agar birinchi tartibli

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

Tenglamada  $f(x, y)$  funksiya  $x$  va  $y$  ga nisbatan nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, (1) tenglama  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli tenglama deyiladi.

*Bir jinsli tenglamani yechish.* funksiya bir jinsli bo'lishining shartiga ko'ra

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

Ayniyat yoza olamiz. Bu ayniyatda  $\lambda = \frac{1}{x}$  deb olsak  $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ , ya'ni nol o'lchovli bir jinsli funksiya faqat argumentlar nisbatigagina bog'liq.

Bu holda (1) tenglama

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad (1')$$

ko'rinishini oladi. O'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$u = \frac{y}{x}, \text{ yoki } y = ux.$$

Bu holda

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x.$$

Hosilasining bu ifodasini (1') tenglamaga qo'ysak, o'zgaruvchilari ajraladigan

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u)$$

tenglama hosil bo'ladi. O'zgaruvchilarni ajratib yozamiz:

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \text{yoki} \quad \frac{du}{d(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Buni integrallaymiz:

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Integrallashdan keyin  $u$  ning o'rniga  $\frac{y}{x}$  ni qo'ysak, (1') tenglamaning umumiy integrali hosil bo'ladi.

4-misol.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^3 - y^2}$$

tenglama berilgan. O'ng tomonda nol o'lchovli bir jinsli funksiya turipti; demak, bizga bir jinsli tenglama berilgan. O'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{yoki} \quad y = ux, \text{ bu holda;}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx};$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2};$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1 - u^2}.$$

O'zgaruvchilarni ajratib,

$$\frac{(1 - u^2)du}{u^2} = \frac{dx}{x};$$

$$\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}.$$

ni hosil qilamiz; buni integrallaymiz:

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C| \quad \text{yoki} \quad -\frac{1}{u^2} = \ln|uxC|.$$

Topilgan bu natijadagi  $u$  o'zgaruvchiga o'rniga  $\frac{y}{x}$  ni qo'ysak, dastlabki tenglamaning umumiy integrali hosil bo'ladi.

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|Cy|.$$

Qaralayotgan hol uchun  $y$  ni elementar funksiyalar yordami bilan yozilgan  $x$  ning oshkor funksiyasi kabi hosil qilish mumkin emas. Lekin, bu yerda  $x$  ni  $y$  orqali ifodalash oson

$$x = y\sqrt{-2C \ln|Cy|}.$$

Izoh.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ko'rinishdagi tenglama  $M(x, y)$  va  $N(x, y)$  funksiyalar o'lchovlari bir xil bo'lgan bir jinsli funksiyalar bo'lgandagina bir jinsli tenglama bo'ladi. Bu faqat ikkita bir xil o'lchovli funksiyalarning bir-biriga bo'lgan nisbati nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lishidan kelib chiqadi.

5-misol.

$$(2x + 3y)dx + (x - 2y)dy = 0,$$

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$$

Tenglamalar bir jinsli tenglamalardir.

### Bir jinsli tenglamaga keladigan tenglamalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalar bir jinsli tenglamalarga keltiriladi. Agar  $c_1 = c = 0$  bo'lsa, (1) tenglamaning bir jinsli bo'lishi o'z-o'zidan ravshan. Endi  $c$  va  $c_1$  (yoki bo'lardan bittasi) noldan farqli bo'lsin. O'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + h.$$

Bu holda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \quad (2)$$

$x$ ,  $y$  va  $\frac{dy}{dx}$  larning ifodalarini (2) tenglikka qo‘ysak,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{ax_1 + by_1 + a_1h + b_1k + c_1} \quad (3)$$

hosil bo‘ladi.  $h$  va  $k$  larni

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladigan qili tanlaymiz, yoki boshqacha aytganda,  $h$  hamda  $k$  larni tenglamalar sistemasi ning yechimi kabi aniqlaymiz. Bu shart bajarilganda (3) tenglama

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{ax_1 + by_1}$$

bir jinsli tenglamaga aylanadi.

Bu tenglamani yechib, so‘ngra (2) formulaga muvofiq yana  $x$  va  $y$  larga o‘tsak, (1) tenglamani yechimini hosil qilamiz.

Agar

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lsa, ya’ni  $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ ,  $ab_1 - a_1b = 0$ ,  $ab_1 = a_1b$  bo‘lsa, (4) sistemaning yechimi

mavjud emas. Ammo bu holda  $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ , ya’ni  $a_1 = \lambda a$ ,  $b_1 = \lambda b$  va, demak, (1) tenglamani

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \quad (5)$$

ko‘rinishga keltirish mumkin.

Bu holda

$$z = ax + by \quad (6)$$

almashtirish yordamida tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Haqiqatan ham,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

bundan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \quad (7)$$

(5) tenglamaga (6) va (7) ifodalarni qo'yib,

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z + c_1}$$

Tenglamani hosil qilamiz, bu esa o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir.

(1) tenglamani integrallashda foydalanilgan usul

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

tenglamani integrallashga ham tatbiq etiladi, bundan  $f$  funksiya har qanday uzluksiz funksiya bo'la oladi.

1-misol.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

tenglama berilgan. Buni bir jinsli tenglamaga keltirish uchun o'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$x = x_1 + h; \quad y = y_1 + k.$$

Bu holda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x_1 + h + y_1 + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

$$\begin{cases} h+k-3=0 \\ h-k-1=0 \end{cases}$$

$$h=2, \quad k=1.$$

ekanini topamiz. Natijada bir jinsli

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

tenglamani hosil qilamiz; bunda

$$\frac{y_1}{x_1} = u$$

almashtirish yordamida yechib, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga ega bo'lamiz:

$$y_1 = ux_1; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}; \quad u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u}; \quad x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Bu tenglamani integrallab,  $x = x_1 + h; \quad y = y_1 + k$ . almashtirish yordamida yechib bo'lmaydi,

$$\operatorname{arctgu} - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln x_1 + \ln C, \quad \operatorname{arctgu} = \ln(\sqrt{1+u^2} x_1 C)$$

yoki

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\operatorname{arctgu}}$$

ni topamiz.

Bu yerda  $u$  ning o'rniga  $\frac{y_1}{x_1}$  ni qo'yib,

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}$$

ni hosil qilamiz. Endi biz,  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilarga o'tib, natijada

$$C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}$$

tenglikni hosil qilamiz.

2-misol.

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

tenglamani  $x = x_1 + h; \quad y = y_1 + k$ . almashtirish yordamida yechib bo'lmaydi, chunki bu holda  $h$  va  $k$  larni aniqlashda foydalanilgan tenglamalar sistemasi yechib bo'lmaydigan sistemadir (bunda o'zgaruvchilarning koeffitsientlaridan tuzilgan

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$  determinant nolga teng).

Bu tenglamani

$$2x + y = z$$

almashtirish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirish mumkin.

Bu holda  $y' = z' - 2$  va tenglama

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

yoki

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

ko'rishga keladi. Buni yechib,

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C$$

ekanini topamiz. Ammo  $z = 2x + y$  bo'lgani uchun biz dastlabki tenglamaning yechimini

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\ln|10x+5y+9| = x + C$$

yoki

$$10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| = C$$

ko'rishda hosil qilamiz, ya'ni  $y$  funksiya  $x$  ning oshkormas funksiyasi shaklida hosil bo'ladi.

3-misol. Quyidagi o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama yechimini qaraymiz:

$$xyy' = 1 - x^2$$

Bu yerda  $y' = \frac{dy}{dx}$  bo'lib, tenglama quyidagicha ko'rinadi:

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2$$

$$ydy = \frac{1-x^2}{x} dx$$

$$\int ydy = \int \frac{1-x^2}{x} dx$$

Chap tomonini integrallab

$$\int ydy = \frac{y^2}{2} + C_1$$

tenglikni olamiz.

O'ng tomonini integrallab

$$\int \frac{1-x^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int x dx = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_2$$

tenglikni olamiz.

Natijada:

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C, \quad C = C_1 - C_2$$

$$y^2 = 2\ln|x| - x^2 + 2C \text{ yoki } y^2 + x^2 = \ln Cx^2$$

Bu, differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

4-misol. Quyidagi o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani yechimini qaraymiz:

$$yy' = \frac{1-2x}{y}$$

$y' = \frac{dy}{dx}$  shuning uchun tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y}$$

$$y^2 \frac{dy}{dx} = 1-2x$$

$$y^2 dy = (1-2x) dx$$

Chap tomoni:

$$\int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C_1$$

O'ng tomoni:

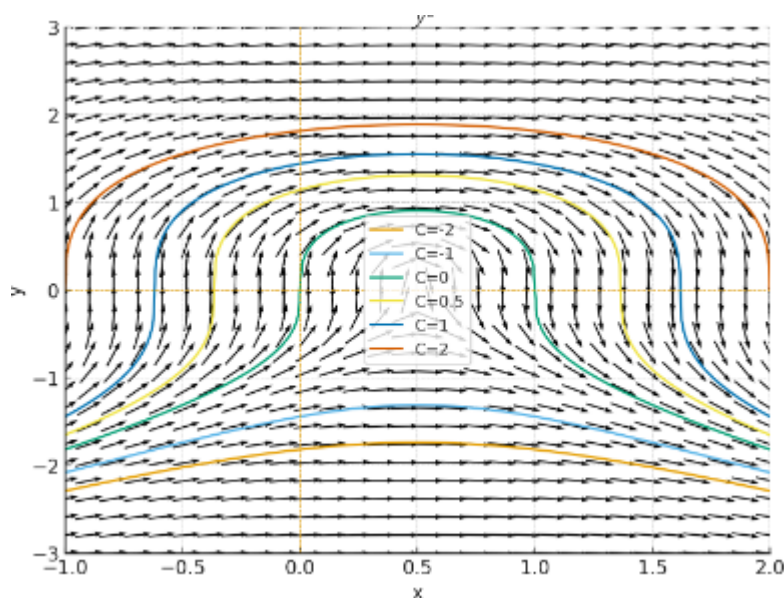
$$\int (1-2x) dx = x - x^2 + C_2$$

Shunday qilib

$$\frac{y^3}{3} + C_1 = x - x^2 + C_2$$

Javobi.  $y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}$

Grafigi



5-misol. Quyidagi o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani yechimini qaraymiz:

$$xy' + y = y^2$$

$$y' = \frac{y^2 - 1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x}$$

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

Shunday qilib, tenglamani quyidagicha yozamiz:

Chap toonini:

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$$1 = (A+B)y - A$$

Agar y-ning koeffitsienti  $A+B=0$  bo'lsa va  $-A=1$  bo'lsa, quyidagini olamiz:

Demak,

$$\frac{1}{y(y-1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \left( -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy = -\ln|y| + \ln|y-1| + C_1$$

O'ng tomoni:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2$$

$$-\ln|y| + \ln|y-1| = \ln|x| + C$$

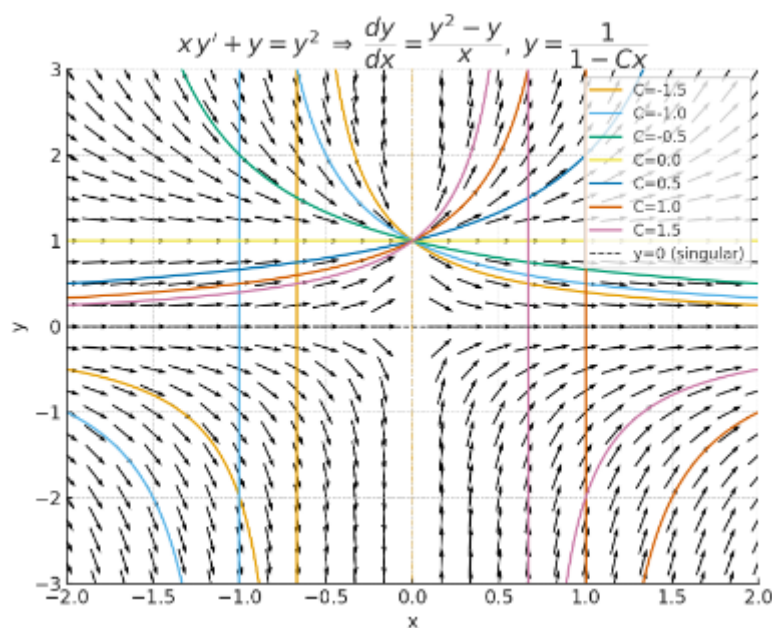
$$\ln\left(\frac{|y-1|}{|y|}\right) = \ln|x| + C$$

$C = \ln C'$  belgilasak  $C' = e^C$

$$\ln\left(\frac{|y-1|}{|y|}\right) = \ln|C'x|$$

$$\frac{|y-1|}{|y|} = C'x$$

Agar boshlang'ich shartlar mavjud bo'lsa, aniq yechimni topish mumkin.



6-misol. Tenglamani yeching.

$$3e^x \operatorname{tg} y \, dx + (2 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0.$$

Yechish. Tenglamaning ikki tomonini  $\operatorname{tgy} \cdot (2 - e^x)$  ko'paytmaga bo'lamiz:

$$\frac{3e^x dx}{2 - e^x} + \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tgy}} dy = 0.$$

O'zgaruvchilari ajralgan tenglama hosil qildik. Uni integrallab,

$$-3 \ln|2 - e^x| + \ln|\operatorname{tgy}| = C_1.$$

Soddalashtirishlar qilib,

$$2. \quad \frac{|\operatorname{tgy}|}{|(2 - e^x)^3|} = e^{C_1} \text{ yoki } \left| \frac{\operatorname{tgy}}{(2 - e^x)^3} \right| = e^{C_1}$$

yechimga ega bo'lamiz. Bundan

$$\frac{\operatorname{tgy}}{(2 - e^x)^3} = \pm e^{C_1}.$$

$\pm e^{C_1} = C$  deb belgilab, berilgan differensial tenglamaning umumiy integralini topamiz:

$$\frac{\operatorname{tgy}}{(2 - e^x)^3} = C \text{ yoki } \operatorname{tgy} - C(2 - e^x)^3 = 0.$$

tenglamani  $\operatorname{tgy} \cdot (2 - e^x)$  ko'paytmaga bo'lganimizda ko'paytuvchilarning hech biri nolga teng emas deb faraz qilganmiz. Har bir ko'paytuvchini nolga tenglab

$$y = k\pi (k = 0, \pm 1, \dots), \quad x = \ln 2$$

topamiz.

Bularni tenglamaga qo'yib,  $y = k\pi$  va  $y = \ln 2$  funktsiyalar bu tenglamani yechimi ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu yechimlar umumiy untegraldan  $C = 0$

va  $C = \infty$  da hosil bo'ladi. Bu shuni anglatadiki, o'zgarmas  $C$  ni  $\frac{1}{C_2}$  bilan

almashtirsak umumiy integral

$$tgy - \frac{1}{C_2}(2 - e^x)^3 = 0 \text{ yoki } C_2 tgy - (2 - e^x)^3 = 0$$

ko'rinishga keladi. Oxirgi tenglikda  $C = 0$  desak, bunga mos  $C_2 = \infty$  bo'ladi. U holda  $(2 - e^x)^3 = 0$  ekanligi kelib chiqadi. Natijada  $x = \ln 2$  yechimga ega bo'lamiz. Demak,  $y = k\pi (k = 0, \pm 1, \dots)$  va  $x = \ln 2$  funksiyalar berilgan differensial tenglamalarning xususiy yechimi bo'ladi. Shuning uchun berilgan tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$tgy - C(2 - e^x)^3 = 0, y = k\pi (k = 0, \pm 1, \dots), x = \ln 2.$$

1-10-misollarda berilgan tenglamani yeching va uning bir nechta integral chiziqlarini ko'rsating.

$$1. xydx + (x + 1)dy = 0$$

Yechimini qaraymiz:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x+1}y, \quad x \neq -1$$

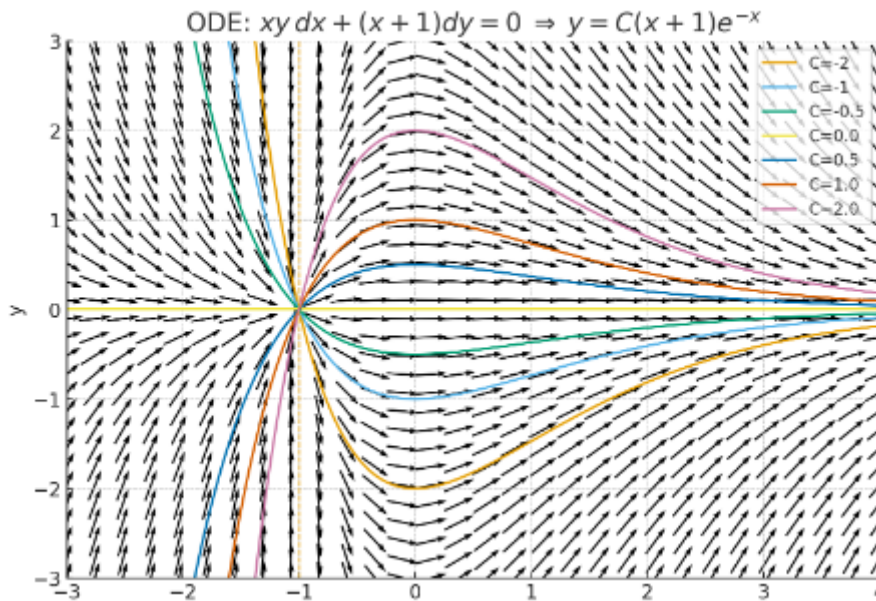
Bu — birinchi tartibli chiziqli tenglama:

$$y' + p(x)y = 0 \text{ bilan } p(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{x}{x+1} dx\right) = \exp(x - \ln|x+1|) = \frac{e^x}{x+1}$$

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = 0 \Rightarrow \mu(x)y = C$$

$$y(x) = C(x+1)e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$



$$2. \sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy.$$

$$3. (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$4. y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$$

$$5. xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5.$$

$$6. 2x^2yy' + y^2 = 2.$$

$$7. y' - xy^2 = 2xy.$$

$$8. y' = \cos(x - y).$$

$$9. y' - y = 2x - 3.$$

$$10. y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

### Savollar

- 1) O'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli tenglamaga ta'rif bering
- 2) Nol o'lchovli bir jinsli funksiyaga misol ko'rsating
- 3) O'zgaruvchilari ajralgan tenglamalarni ko'rsating
- 4) O'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalarni ko'rsating
- 5) Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalarni misollar bilan ko'rsating
- 6) Bir jinsli tenglamaga keladigan tenglamalarni misollar bilan ko'rsating