

3-mavzu: Chiziqli differensial tenglamalar va unga keladigan tenglamalar. Bernulli tenglamasi.

Reja:

- 1) Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar
- 2) Bernulli tenglamasi
- 3) Misollar yechish

Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar

Ta'rif. Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan tenglamaga aytiladi. U

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda $P(x)$ va $Q(x)$ lar x ning berilgan uzliksiz funksiyalari(yoki o'zgarmas sonlar).

(1)chiziqli tenglamani yechish. (1) tenglamani yechimini x ning ikkita funksiyasi ko'paytmasi shaklida izlaymiz:

$$y = u(x)v(x). \quad (2)$$

Bu funksiyalardan birini ixtiyoriy olish mumkin, ikkinchisini esa (1) tenglamaga asosan aniqlanadi.

(2)tenglikning ikkala tomonini differensiallaymiz;

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx}$ hosilaning topilgan ifodasini (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v + Puv = Q$$

yoki

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q. \quad (3)$$

v funksiyani

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0 \quad (4)$$

tenglama o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz. Bu differensial tenglamada o'zgaruvchularni v ga nisbatan ajratamiz:

$$\frac{dv}{v} = -Pdx.$$

Buni integrallaymiz:

$$-\ln C_1 + \ln v = -\int Pdx$$

yoki

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

tenglamani hosil qilamiz, bundan

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

ekani kelib chiqadi. u ning bu qiymatini (2) formulaga qo'ysak, natijada

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right]$$

yoki

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x) \quad (6)$$

hosil bo'ladi.

Izoh. Agar (5) tenglik yordamida aniqlangan $v(x)$ funksiya o'rniga biror $v_1(x) = \bar{C}v(x)$ funksiya olsak, (6) ifodaning o'zgarmasligi ravshan. Haqiqatan ham, (6) tenglikdagi $v(x)$ o'rniga $v_1(x)$ qo'ysak,

$$y = \bar{C}v(x) \int \frac{Q(x)}{\bar{C}v(x)} dx + C\bar{C}v(x)$$

Tenglik hosil bo'ladi. Birinchi qo'shiluvchidagi \bar{C} qisqarib ketadi; ikkinchi qo'shiluvchidagi $C\bar{C}$ ko'paytma ixtiyoriy o'zgarmas sonidir, uni bitta C harfi bilan belgilasak, biz yana (6) ifodaga kelamiz. Agar $\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = \varphi(x)$ deb belgilasak, (6)

ifoda

$$y = v(x)\varphi(x) + Cv(x) \quad (6')$$

ko'rinishni oladi. Bu umumiy integral bo'ladi, chunki C ning quyidagi $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi qiymatini tanlab olish mumkin. C ning bunday qiymati

$$y_0 = v(x_0)\varphi(x_0) + Cv(x_0)$$

tenglikdan aniqlanadi.

Misol.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

tenglama yechilsin.

Yechish.

$$y = uv$$

deb faraz qilsak, $\frac{dy}{dx}$ hosila uchun

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$$

ifoda hosil bo'ladi, $\frac{dy}{dx}$ hosilaning ifodasini berilgan tenglamaga qo'ysak, u

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v\right) + \frac{du}{dx}v = (x+1)^3 \quad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi. v ni aniqlash uchun

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0$$

ya'ni

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$\ln v = 2 \ln(x+1)$$

yoki

$$v = (x+1)^2.$$

v funksiyaning topilgan bu ifodasini (7) tenglamaga qo'ysak, u ni topish uchun

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

yoki

$$\frac{du}{dx} = x+1.$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Topilgan bu oila berilgan tenglamaning umumiy yechimidir. $(x_0; y_0)$ boshlang‘ich shart har qanday bo‘lganda ham (bunda $x_0 \neq -1$) hamma vaqt C ni mos xususiy yechim boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olish mumkin. Masalan, $x_0 = 0$ bo‘lganda, $y_0 = 3$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechim quyidagicha topiladi:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2, \quad C = \frac{5}{2}.$$

Demak, izlanayotgan xususiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Agar $(x_0; y_0)$ boshlang‘ich shartni $x_0 = -1$ bo‘ladigan qilib tanlab olinsa $x_0 = -1$ bo‘lganda $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ funksiyani uzilishga ega bo‘lishi va demak, yechim mavjudlik teoremasining sharti bajarilmasligi sababli biz bu boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topa olmaymiz.

2-misol. Ushbu tenglamani yeching:

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}.$$

Yechish. $y = uv$ almashtirishni bajarib, quyidagi hosil qilamiz:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - uv \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$$

yoki

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} - u \operatorname{tg} x \right) = \frac{2x}{\cos x}$$

u ni

$$\frac{du}{dx} - utgx = 0$$

Bo'ladigan qilib tanlaymiz. Integrallasak,

$$\ln u = -\ln \cos x \quad \text{yoki} \quad u = \frac{1}{\cos x}$$

v ni o'zgaruvchilari ajraladigan

$$u \frac{dv}{dx} = \frac{2x}{\cos x} \quad (1)$$

Dan toppish uchun

$$\frac{1}{\cos x} \frac{dv}{dx} = \frac{2x}{\cos x}$$

Tenglamani xususiy yechimini tanlab olsak kifoya. u ning o'rniga uning qiymatini (1) tenglama qo'yamiz:

$$dv = 2x dx; \quad v = x^2 + C.$$

Umumiy yechim quyidagicha bo'ladi:

$$y = \frac{1}{\cos x} (x^2 + C).$$

Bu sistemani ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli (Lagranj usuli) bilan yechish mumkin. Uning mohiyati quyidagidan iborat: mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimida C o'zgarmas shunday $C(x)$ funksiyaga almashtiradiki, natijada bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimiga aylanadi.

Buni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{dy}{dx} - ytgx = 0$$
$$y = \frac{C}{\cos x},$$

Bu yerda C - ixtiyoriy o'zgarmas.

Endi C ning x ning funksiyasi va $y = \frac{C}{\cos x}$ bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimi deb hisoblab, quyidagini topamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot C + \frac{1}{\cos x} \frac{dC}{dx}.$$

y va $\frac{dy}{dx}$ ni dastlabki tenglamaga qo'yib, $C(x)$ funksiyani aniqlash uchun ushbu differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} C + \frac{1}{\cos x} \frac{dC}{dx} - C \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2x}{\cos x},$$

Bu yerdan $2C = 2xdx$ va $C(x) = x^2 + C_1$, bunda C_1 - o'zgarmas, endi chiziqli tenglamaning umumiy yechimini yozamiz:

$$y = \frac{x^2 + C_1}{\cos x}.$$

3-misol. Ushbu tenglamani yeching:

$$e^{x^2} (y' + 2xy) = 2x \text{ yoki } y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

Yechish: $y = uv$ almashtirishni bajaramiz:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + 2xuv = 2xe^{-x^2}$$

u ni

$$\frac{du}{dx} + 2xu = 0$$

Bo'adigan qilib tanlaymiz:

$$\frac{du}{u} + 2xu = 0, \ln u + x^2 = \ln C - x^2$$

$$u = e^{-x^2}$$

Endi

$$u \frac{dv}{dx} = 2xe^{-x^2}$$

tenglamada u ning o'rniga uning qiymatini qo'yib,

$$e^{-x^2} \frac{dv}{dx} = 2xe^{-x^2}$$

ni, uni integrallab esa, $v = x^2 + C$ ni hosil qilamiz. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{-x^2} (x^2 + C)$$

ko‘rinishga keladi.

Bernulli tenglamasi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamani qaraymiz, bunda $P(x)$ va $Q(x)$ - x ning uzluksiz funksiyalari (yoki o‘zgarmas miqdorlar) hamda $n \neq 0$ va $n \neq 1$ (aks holda chiziqli tenglama hosil bo‘lgan bo‘lar edi).

Bernulli tenglamasi deb atalgan bu tenglama quyidagi almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Tenglamaning barcha xadlarini y^n ga bo‘lamiz:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x) \quad (2)$$

endi

$$z = y^{-n+1}$$

almashtirishni bajaramiz. U holda

$$\frac{dz}{dx} = (-n + 1)y^{-n+1} \frac{dy}{dx}.$$

topilganlarni (2) tenglamaga qo‘ysak,

$$\frac{dz}{dx} + (-n + 1)P(x)z = (-n + 1)Q(x)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan bu tenglama chiziqli tenglamadir.

Buning umumiy integralini topib hamda z o‘rniga y^{-n+1} ifodani qo‘yib, Bernulli tenglamasining umumiy integralini topamiz.

4-misol.

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3 \quad (3)$$

tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning hamma hadlarini y^3 ga bo'lsak,

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3 \quad (4)$$

tenglama hosil bo'ladi.

$z = y^{-2}$ deb olsak,

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

bo'ladi. Topilganlarni (4) tenglamaga qo'ysak,

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3 \quad (5)$$

Chiziqli tenglamaga ega bo'lamiz:

Bu tenglamaning umumiy integralini topamiz:

$$z = uv; \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

z va $\frac{dz}{dx}$ larning ifodalarini (5) tenglamaga qo'yamiz:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - 2xuv = -2x^3$$

yok

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Qavs ichidagi ifodani nolga tenglaymiz;

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0; \quad \frac{dv}{v} = 2x dx; \quad \ln v = x^2; \quad v = e^{x^2}.$$

u ni aniqlash uchun

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3$$

Tenglamani hosil qilamiz:

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + C$$

Bo'laklab integrallash yordamida

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C; \quad z = uv = x^2 + 1 + Ce^{-x^2}$$

tenglikni topamiz. Demak,

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{-x^2}, \quad \text{yoki} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{-x^2}}}$$

Berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

Izoh. Chiziqli tenglamalarni yechgandagidek Bernulli tenglamasining yechimini ham ikkita funksiya ko'paytmasi, ya'ni

$$y = u(x)v(x)$$

Ko'rinishda izlash mumkinligini ko'rsatsa bo'ladi, bunda $v(x)$ funksiya $v' + Pv = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi, noldan farqli biror funksiya.

5-misol. Bernulli tenglamasini yeching: $y' - xy = -xy^3$.

Yechish. Tenglamani ikkala tomonini y^3 ga bo'lamiz:

$$\frac{y'}{y^3} - x \frac{1}{y^2} = -x.$$

Keyin $\frac{1}{y^2} = z$, $-\frac{2y'}{y^3} = z'$ almashtirish bajaramiz. Bundan esa $\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}z'$ topamiz.

O'rniga qo'yishlardan so'ng, oxirgi tenglama chiziqli tenglamaga aylanadi.

$$-\frac{1}{2}z' - xz = -x \quad \text{yoki} \quad z' + 2xz = 2x.$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$z = 1 + Ce^{-x^2}$$

teng. Bundan berilgan tenglamani umumiy integralini

$$\frac{1}{y^2} = 1 + Ce^{-x^2} \quad \text{yoki} \quad y^2(1 + Ce^{-x^2}) = 1$$

topamiz.

Izoh. Bernulli tenglamasi ham ozgarmasni variosiyalash usuli va chiziqli tenglamalar kabi $y(x) = u(x)v(x)$ o'rniga qo'yish usuli yordamida ham integrallanishi mumkin.

6-misol. Bernulli tenglamasini yeching:

$$xy' + y = y^2 \ln x. \quad (1)$$

Yechish. O'zgarasni variasiyalash usulini qo'llaymiz. Mos bir jinsli qismining $xy' + y = 0$ umumiy yechimi $y = \frac{C}{x}$ ko'rishga ega. (1) tenglamaning umumiy yechimini

$$y = \frac{C(x)}{x} \quad (2)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda $C(x)$ – yangi noma'lum funksiya.

(2) ni (1) ga qo'yamiz va

$$C'(x) = C^2(x) \frac{\ln x}{x^2}$$

tenglamaga kelamiz. $C(x)$ ni toppish uchun o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga egamiz. O'zgaruvchilarni ajratib, integrallab

$$\frac{1}{C(x)} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C; C(x) = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}$$

topamiz.

(1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}$$

ko'rinishdan iborat bo'ladi.

Ba'zi chiziqli bo'lmagan birinchi tartibli differensial tenglamalar kerakli almashtirishlardan so'ng chiziqli tenglamaga yoki Bernulli tenglamasiga keladi.

7-misol. Tenglamani yeching: $y' + \sin y + x \cos y + x = 0$.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda

$$y' + 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} + x 2 \cos^2 \frac{y}{2} = 0$$

yo'zib olamiz. Tenglamaning ikkala tomonini $2 \cos^2 \frac{y}{2}$ ga bo'lamiz. Natijada ushbu

$$\frac{y'}{2 \cos^2(y/2)} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} + x = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. $z = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{y'}{2 \cos^2(y/2)}$ almashtirish yordamida bu

tenglama $\frac{dz}{dx} + z = -x$ chiziqli tenglamaga keladi. Buning umumiy yechimi

$$z = 1 - x + Ce^{-x}$$

teng. z ni y orqali ifodalab, berilgan tenglamaning

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2} = 1 - x + Ce^{-x}$$

umumiy integralini topamiz.

Ba'zi tenglamalarda izlanayotgan $y(x)$ funksiya integral ostida bo'lishi mumkin. bunday hollarda berilgan tenglamani differensiallash yoli bilan differensial tenglamaga keitiriladi.

8-misol. Tenglamani yeching: $x \int_0^x y(t) dt = (x+1) \int_0^x ty(t) dt$, $x > 0$.

Yechish. Bu tenglamaning ikkala tomonini x bo'yicha differensiallaymiz:

$$\int_0^x y(t) dt + xy(x) = \int_0^x ty(t) dt + (x+1)xy(x),$$

yoki

$$\int_0^x y(t)dt = \int_0^x ty(t)dt + x^2 y(x).$$

x bo'yicha yana bir marta differensiallaymiz, $y(x)$ nisbatan chiziqli bir jinsli tenglama hosil bo'ldi:

$$y(x) = xy(x) + x^2 y'(x) + 2xy(x),$$

yoki

$$x^2 y'(x) + (3x - 1)y(x) = 0.$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz va integrallab

$$y = C \frac{1}{x^3} e^{-1/x}$$

topamiz. Bu yechim berilgan tenglamani qanoatlantirishini oson tekshirishimiz mumkin.

Savollar

- 1) Birinchi tartibli chiziqli tenglamaga ta'rif bering
- 2) Chiziqli differensial tenglamalarni misollar bilan tushuntiring
- 3) Chiziqli differensial tenglamalarga keladigan tenglamalar.
- 4) Bernulli tenglamasi.