

## 1-Mavzu: Oddiy differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari

### Reja:

- 1) Masalaning qo'yilishi
- 2) Ta'riflar
- 3) Birinchi tartibli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar
- 4) Misollar

### Masalaning qo'yilishi

$y = f(x)$  funksiya biror hodisaning miqdoriy tomonini aks ettirsin. Ko'pincha, biz bu hodisani tekshirishda  $y$  bilan  $x$  orasidagi bog'lanish xarakterini bevosita belgilay olmaymiz, ammo  $x$  va  $y$  miqdorlar hamda  $y$  dan  $x$  bo'yicha olingan  $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$  hosilalar orasidagi munosabatni belgilay olishimiz, ya'ni differensial tenglama yozishimiz mumkin.

$x$  va  $y$  o'zgaruvchilar hamda hosilalar orasida topilga bu munosabatdan  $y$  bilan  $x$  orasidagi bog'lanishni bevosita belgilash, ya'ni  $y = f(x)$  ni topish, yoki boshqacha aytganda, differensial tenglamani integrallash talab etiladi.

Quyidagi misollarni qaraymiz.

1-misol. Massasi  $m$  bo'lgan jism biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Agar jismga og'irlik kuchidan tashqari, havoning tezlikka proporsiyanal bo'lgan(proporsionallik koeffitsiyenti  $k$ ) qarshilik kuchi ta'sir etsa, bu jismning tezligi  $v$  qanday qonun bilan o'zgarishini bilish, ya'ni  $v = f(t)$  munosabatni topish talab etiladi.

Yechish: Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra,

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

Bunda  $\frac{dv}{dt}$  harakatdagi jismning tezlanishi(tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosila),  $F$  esa jismga harakat yo'nalishida ta'sir etuvchi kuch bo'lib, u og'irlik kuchi  $mg$  dan va havoning qarshilik kuchi tezlikning yunalishiga teskari yunalgani uchun uni manfiy ishora bilan olamiz. Shunday qilib,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (1)$$

Biz noma'lum  $v$  funksiya bilan uning  $\frac{dv}{dt}$  hosilasi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi munosabatni, ya'ni nomalum  $v$  funksiyaga nisbatan differensial tenglama hosil qildik. Differensial tenglamani yechish – berilgan differensial tenglamani aynan

qanoatlantiruvchi  $v = f(t)$  funksiyani topish demakdir. Differensial tenglamani qanoatlantiruvchi bunday funksiyalar cheksiz ko'p. Har qanday

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2)$$

Ko'rinishdagi funksiya  $C$  o'zgarmas miqdor har qanday bo'lganda ham (1) tenglamani qanoatlantirishini o'quvchi osonlik bilan tekshirish mumkin. Bu funksiyalardan qaysi biri  $v$  ning  $t$  orqali izlanayotgan munosabatini beradi. Buni topish uchun qo'shimcha shartdan foydalanamiz: jismni tashlab yuborishda unga boshlang'ich  $v_0$  tezlik berilgan edi (u xususiy holda nolga teng bo'lishi ham mumkin); biz bu boshlang'ich tezlikni ma'lum deb faraz qilamiz. Ammo bu holda izlanayotgan  $v = f(t)$  funksiya shunday bo'lishi kerakki, uning uchun  $t = 0$  bo'lganda (harakat boshlanishida)  $v = v_0$  shart bajarilishi kerak. (2) formulaga  $t = 0$ ,  $v = v_0$  ni qo'yamiz:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k}.$$

bundan

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Shunday qilib,  $C$  o'zgarmas miqdor topildi. Demak,  $v$  bilan  $t$  orasidagi izlanayotgan bog'lanish:

$$v = (v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}. \quad (2')$$

Agar  $k = 0$  bo'lsa (ya'ni havoning qarshiligi yo'q yoki e'tiborga olmaydigan darajada kichik bo'lsa), u holda fizikadan ma'lum bo'lgan

$$v = v_0 + gt \quad (2'')$$

Formulani hosil qilamiz. Topilgan  $v$  funksiya  $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$  differensial tenglamani va  $t = 0$  bo'lganda  $v = v_0$  boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

2-misol. Bir jinsli elastik ip ikki uchidan osib qo'yilgan. Ip o'z og'irligi ta'sirida biror egri chiziq bo'yicha joylashtiradi (osilgan arqon, sim zanjir, masalan, tankning ushlab turuvchi ikki katogi orasidagi gusenitsiasi shunday egri chiziq bo'yicha joylashgan). Bu egri chiziqning tenglamasi topilsin.

Yechish.  $M_0(0,b)$  ipning eng pastki nuqtasi,  $M$  esa uning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin(1-rasm). Ipning  $M_0M$  qismini qaraymiz. Bu qism uchta kuch ta'siri ostida muvozanatda bo'ladi:

- 1)  $M$  nuqtada urinma bo'yicha ta'sir etuvchi va Ox o'q bilan  $\varphi$  burchak tashkil qiluvchi taranglik kuchi ( $T$ ).
- 2)  $M_0$  nuqtadagi gorizantal ta'sir etuvchi taranglik kuchi ( $H$ )
- 3) Ipning pastga vertikal yunalgan og'irligi  $\gamma s$ ,  $s - M_0M$  yoyning uzunligi,  $\gamma$  esa ipning chiziqli solishtirma og'irligi.

$T$  taranglik kuchini gorizantal va vertikal tashkil etuvchilarga ajratib, muvozanat tenglamalarga yozamiz:

$$\begin{aligned} T \cos \varphi &= H, \\ T \sin \varphi &= \gamma s. \end{aligned}$$

Ikkinchi tenglamaning hadlarini birinchi tenglamaning mos hadlariga bo'lib,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda}{H} s \quad (3)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi izlanayotgan egri chiziqning tenglamasini  $y = f(x)$  ko'rinishda yozish mumkin, deb faraz qilaylik. Bu yerda  $f(x)$  noma'lum funksiya, uni toppish kerak.

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Ekaniga e'tibor beramiz. Demak,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s, \quad (4)$$

bunda  $a = \frac{H}{\gamma}$

(4) tenglamaning ikkala tomonini  $x$  bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \quad (5)$$

bu yerda

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

teng bo'ladi.

Bu ifodani (5) ifodaga qo'yib, izlanayotgan egri chiziqning

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (6)$$

Differensial tenglamasini hosil qilamiz.

Bu tenglama noma'lum  $y$  funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

Tenglamani yechish usullari ustida to'xtamasdan, hozircha

$$y = \frac{a}{2} \left[ e^{\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right] + C_2 \quad (7)$$

ko'rinishdagi har qanday funksiya  $C_1$  va  $C_2$  o'zgarmas miqdorlarning istalgan qiymatlarida (6) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatib o'tamiz. Bo'ning to'g'riligiga ko'rsatilgan funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini (6) tenglamaga qo'yish bilan osongina hisoblash mumkin.

Endi bu funksiyalar ( $C_1$  va  $C_2$  larning turli qiymatlarida) (6) tenglamaning mumkin bo'lgan barcha yechimlarini berishini isbotsiz ko'rib o'tamiz.

Shu yo'l bilan hosil qilingan hamma funksiyalarning grafiklari *zanjir chiziqlar* deb ataladi.

Endi eng pastki  $M$  nuqtaning koordinatalari  $(0, b)$  bo'lgan zanjir chiziqni hosil qilish uchun  $C_1$  va  $C_2$  o'zgarmas miqdorlarning qiymati nimaga teng bo'lishini aniqlaymiz.  $x = 0$  bo'lganda zanjir chiziqning nuqtasi eng past holatni olgani uchun, bu nuqtada, shartga ko'ra, ordinate  $b$  ga teng, ya'ni  $y = b$ .

(7) tenglamadan:

$$y' = \frac{1}{2} \left( e^{\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right).$$

Buna  $x = 0$  ni qo'ysak:  $0 = \frac{1}{2} (e^{C_1} - e^{-C_1})$ . Demak,  $C_1 = 0$ .

Agar  $M_0$  nuqtaning ordinatasi  $b$  bo'lsa, u holda,  $x = 0$  bo'lganda  $y = b$ .  $x = 0$  va  $C_1 = 0$  deb olsak,  $b = \frac{a}{2} (1 + 1) + C_2$  bo'ladi.

Bundan  $C_2 = b - a$ . Natijada

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

ko'rinishda bo'ladi.

## 2.Ta'riflar

1-ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi  $x$ , noma'lum  $y = f(x)$  funksiya va uning  $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$  hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan tenglamaga aytiladi. Differensial tenglamani quyidagicha belgilashlar yordamida ifodalash mumkin:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

yoki

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0.$$

Agar izlanayotgan  $y = f(x)$  funksiya bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama oddiy differensial tenglama bo'ladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaning tartibi deb tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Masalan,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

tenglama birinchi tartibli differensial tenglamadir.

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0$$

Tenglama esa ikkinchi tartibli differensial tenglamadir.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan harqanday  $y = f(x)$  funksiyaga aytiladi.

1-misol.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

tenglama berilgan bo'lsin.

$$y = \sin x, \quad y = 2 \cos x, \quad y = 3 \sin x - \cos x$$

funksiyalar, umuman

$$y = C_1 \sin x, \quad y = C_2 \cos x \quad \text{yoki}$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

ko'rinishdagi funksiyalar  $C_1$  va  $C_2$  ixtiyoriy o'zgarimas miqdorlarning har qanday qiymatlarida ham berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'ladi, buning

to'g'riligini ko'rsatilgan funksiyalarni berilgan tenglamaga qo'yib ko'rib, ishonish mumkin.

2-misol.

$$y'x - x^2 - y = 0$$

Tenglamani qaraylik

$$y = x^2 + Cx$$

ko'rinishdagi barcha funksiyalar uning yechimi bo'ladi, bunda  $C$  ixtiyoriy o'zgarmas muiqdor. Haqiqatdan ham,  $y = x^2 + Cx$  funksiyani differensiallaymiz:

$$y' = 2x + C.$$

$y$  va  $y'$  larning ifodalanishini dastlabki tenglamaga qo'yib,

$$(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0$$

ayniyatni hosil qilamiz. 1 va 2-misollarda ko'rilgan tenglamalardan har birining cheksiz ko'p yechimlari bor.

### 3. Birinchi tartibli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar

1. Birinchi tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar bu tenglamani  $y'$  ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, uni

$$y' = f(x, y) \quad (1')$$

ko'rinishda yozish mo'mkin.

Bu holda biz differensial tenglama hosilaga nisbatan yechilgan deymiz. Bunday tenglama uchun quyidagi teorema o'rinni bo'lib, bu teorema differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema deyiladi.

Teorema. Agar

$$y' = f(x, y)$$

tenglamada  $f(x, y)$  funksiya va uning  $y$  bo'yicha olingan  $\frac{\partial f}{\partial y}$  xususiy hosilasi  $xOy$

tekislikdagi  $(x_0, y_0)$  nuqtani o'z ichiga oluvchi biror  $D$  sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning  $x = x_0$  bo'lganda  $y = y_0$  shartni qanoatlantiruvchi birgina  $y = f(x)$  funksiyaning mavjud ekanini bildiradi.

Hozirgina bayon qilingan teoremadan (1') tenglama cheksiz ko'p turli yechimlarga ega ekanligi kelib chiqadi (masalan, agar  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0, y_1)$ ,  $(x_0, y_2)$  va

hokazo nuqtalar  $D$  sohada yotsa, grafigi  $(x_0, y_0)$  nuqtadan o'tadigan yechim, grafigi  $(x_0, y_1)$  nuqtadan o'tadigan boshqa yechim, grafigi  $(x_0, y_2)$  nuqtadan o'tadigan yechim va hokazo).

$x = x_0$  bo'lganda  $y$  funksiya berilgan  $y_0$  songa teng bo'lishi kerak degan shart boshlang'ich shart deyiladi. Bu shart ko'pincha

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

Ko'rinishda yoziladi.

1-ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb bitta ixtiyoriy  $C$  o'zgarmas miqdorga bog'liq bo'lgan hamda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

Funksiyaga aytiladi:

- a) Bu funksiya differensial tenglamani  $C$  o'zgarmas miqdorning konkret olingan har qanday qiymatida ham qanoatlantiradi.
- b)  $x = x_0$  bo'lganda  $y = y_0$  yana  $y|_{x=x_0} = y_0$  boshlang'ich shart har qanday bo'lganda ham  $C$  miqdorning shunday  $C = C_0$  qiymatini topish mumkinki,  $y = \varphi(x, C_0)$  funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi. Bunda  $x_0$  va  $y_0$  qiymatlar  $x$  av  $y$  o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasining yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning shartlari bajariladigan qismiga tegishli deb faraz qilinadi.

2. Biz differensial tenglamaning umumiy yechimini izlashda ko'pincha  $y$  ga nisbatan yechilmagan

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2')$$

ko'rinishdagi munosabatga kelib qolamiz. Bu munosabatni  $y$  ga nisbatan yechsak, umumiy yechimni hosil qilamiz. Ammo  $y$  ni  $(2')$  munosabatdan foydalanib elementar funksiyalar bilan ifoda etish hamma vaqt ham mumkin bo'lavermaydi; bunday hollarda umumiy yechim oshkormas ko'rinishda qoldiriladi.

Umumiy yechimni oshkormas holda ifodalovchi  $\Phi(x, y, C) = 0$  ko'rinishdagi tenglik differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

2-ta'rif. Ixtiyoriy  $C$  o'zgarmas miqdorga ma'lum  $C = C_0$  qiymat berish natijasida  $y = \varphi(x, C)$  umumiy yechimdan hosil bo'ladigan har qanday  $y = \varphi(x, C_0)$  funksiya xususiy yechim deb ataladi. Bu holda  $\Phi(x, y, C_0) = 0$  munosabat tenglamaning xususiy integrali deyiladi.

1-misol. Birinchi tartibli

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

tenglama uchun  $y = \frac{C}{x}$  funksiyalar oilasi umumiy yechim bo'la oladi; buning to'g'riligini  $y$  funksiyaning tenglamaga qo'yish bilan osongina tekshirish mumkin.

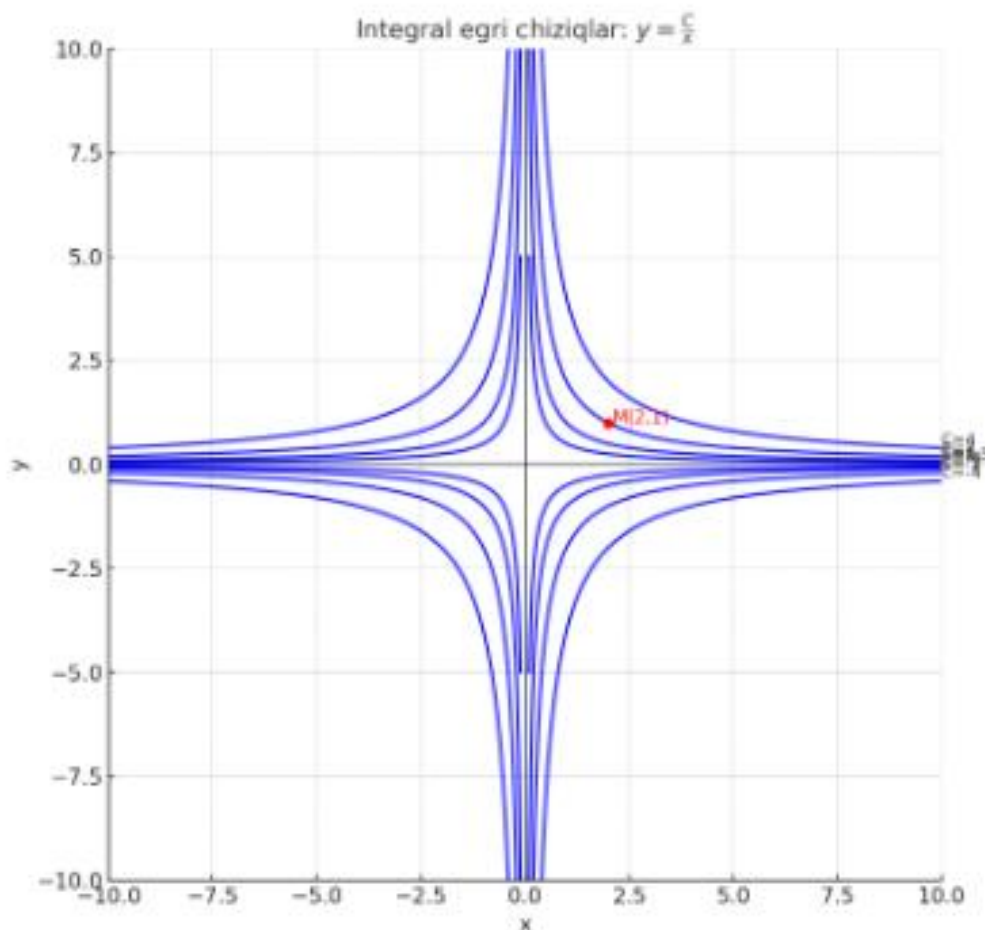
$x_0 = 2$  bo'lganda  $y_0 = 1$  boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topamiz.

Bu qiymatlarni  $y = \frac{C}{x}$  formulaga qo'yib,  $1 = \frac{C}{2}$  yoki  $C = 2$  ekanini topamiz.

Demak,  $y = \frac{2}{x}$  funksiya izlanayotgan yechim bo'ladi.

Geometrik nuqtai nazardan umumiy integral koordinatalar tekisligida bir ixtiyoriy o'zgarmas  $C$  miqdorga (boshqacha aytganda bir parametr) bog'liq bo'lgan egri chiziqlar oilasini ifodalaydi. Bu egri chiziqlar berilgan differensial tenglamaning *integral egri chiziqlari* deyiladi. Xususiy integralga bu oilaning tekislikda berilgan biror nuqta orqali o'tuvchi bitta egri chizig'i mos keladi.

Jumladan bu misolda umumiy integral geometrik jihatdan  $y = \frac{C}{x}$  giperbolalar oilasi bilan etiladi, ko'rsatilgan boshlang'ich shartlar bilan aniqlangan xususiy integral esa bu giperbolaning  $M_0(2,1)$  nuqta orqali o'tuvchi bitta giperbolasi bilan tasvirlanadi.



1-rasm

1-rasmda oila parametrining ba'zi qiymatlariga, masalan,  $C = \frac{1}{2}$ ,  $C = 1$ ,  $C = 2$ ,  $C = -1$  qiymatlariga mos kelgan egri chiziqlari tasvirlangan.

Mulohazalarimizning ancha ko'rgazmali bo'lishi uchun biz bundan keyin tenglamaning yechimi deb, faqat *tenglamani qanoatlantiruvchi*  $y = \varphi(x, C_0)$  funksiyanigina tushunmasdan, balki mos *integral egri chiziqni* ham tushinamiz. Endi biz  $(x_0, y_0)$  nuqta orqali o'tuvchi yechim haqida so'zlashimiz mumkin.

Izoh.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  tenglama  $O_y$  o'qda yotgan nuqta orqa o'tuvchi yechimga ega emas (1-rasmga qarang). Buning sababi shundaki, tenglamaning o'ng tomoni  $x = 0$  bo'lganda aniq emas va, demak, uzluksiz bo'la olmaydi. Differensial tenglamani *yechish* yoki boshqacha aytganda, *integrallash* deganda:

- a) uning umumiy yechimini yoki umumiy integralini (agar boshlang'ich shartlar berilgan bo'lmasa) topish yoki
- b) berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (agar bunday shartlar mavjud bo'lsa) xususiy yechimni topishni tushinish kerak.

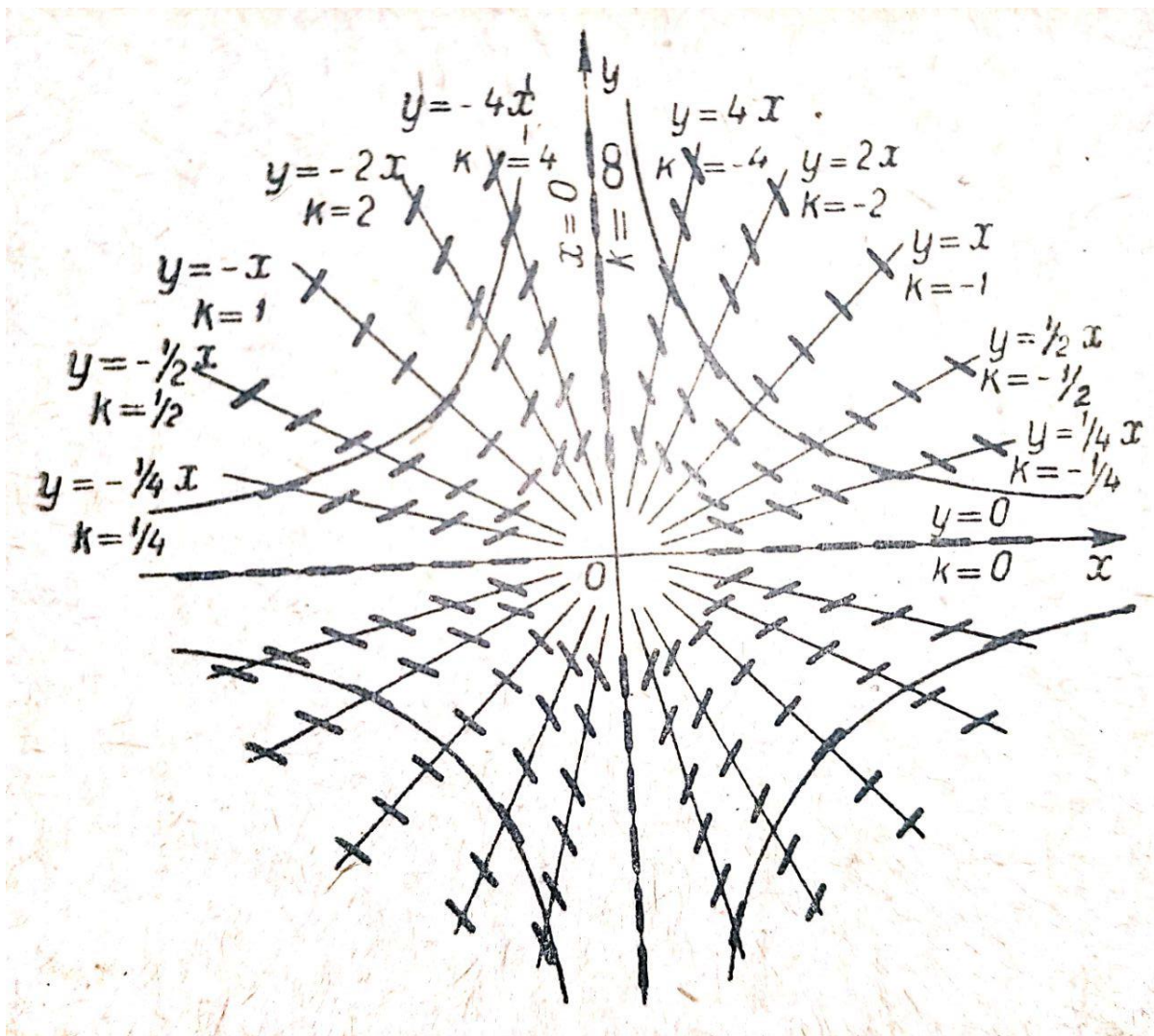
3. Birinchi tartibli differensial tenglamaning geometrik mazmunini aniqlaymiz. Hosilaga nisbatan yechilgan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1')$$

Differensial tenglama berilgan bo'lsin va bu tenglamaning umumiy yechimi  $y = \varphi(x, C)$  bo'lsin. Bu umumiy yechim  $O_{xy}$  tekislikda integral egri chiziqlar oilasini ifodalaydi.

(1') tenglama  $\frac{dy}{dx}$  hosilaning koordinatalari  $x$  va  $y$  bo'lgan har bir  $M$  nuqtaning qiymatini, yana shu  $M$  nuqtadan o'tuvchi integral egri chiziqqa shu nuqtada o'tkazilga urinmaning burchak koeffitsientini aniqlaydi. Shunday qilib (1') differensial tenglama yo'nalishlar to'plamini beradi yoki, boshqacha aytganda, tekislikda yo'nalishlar maydonini aniqlaydi.

Demak, differensial tenglamani integrallashning geometrik ma'nosi mos nuqtalardagi urinmalarning yo'nalish maydonining yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan egri chiziqlarni topishdan iborat ekan.



2-rasm

2-rasmda

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

differensial tenglama bilan aniqlanadigan yo'nalishlar maydoni tasvir etilgan.

4. Endi ushbu misolni qaraymiz. Faqat bitta  $C$  parametrغا bog'liq bo'lgan funksiyalar oilasi berilgan bo'lsin:

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

bunda tekislikning har bir nuqtasidan (yoki tekislikning biror sohasidan) bu oilaning faqat bitta egri chizig'i o'tadi.

Bu funksiyalar oilasi qanday differensial tenglamaning umumiy integrali bo'ladi?

(2) munosabatdan,  $x$  bo'yicha differensiallab

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C) \quad (3)$$

Ifodani topamiz.

Tekislikning har bir nuqtasi orqali oilaning faqat bitta egri chizig'i o'tganida  $x$  va  $y$  sonlarning har bir jufti uchun (2) tenglamadan  $C$  ning bittagina qiymatini (3) munosabatga qo'ysak,  $\frac{dy}{dx}$   $x$  va  $y$  larning funksiyasi kabi aniqlaymiz. Bu esa bizga (2) oilaning har qanday funksiyasi qanoatlantiradigan differensial tenglamani beradi.

Demak,  $x$ ,  $y$  hamda  $\frac{dy}{dx}$  lar orasidagi bog'lanishni belgilash uchun, ya'ni umumiy integrali (2) formula bilan aniqlanadigan differensial tenglamani yozish uchun (2) va (3) munosabatlardan  $C$  ni yo'qotish kerak.

2-misol.  $y = Cx^2$  parabolalar oilasining differensial tenglamasi topilsin (3-rasm).

Oilaning tenglamasini  $x$  bo'yicha differensiallaymiz:

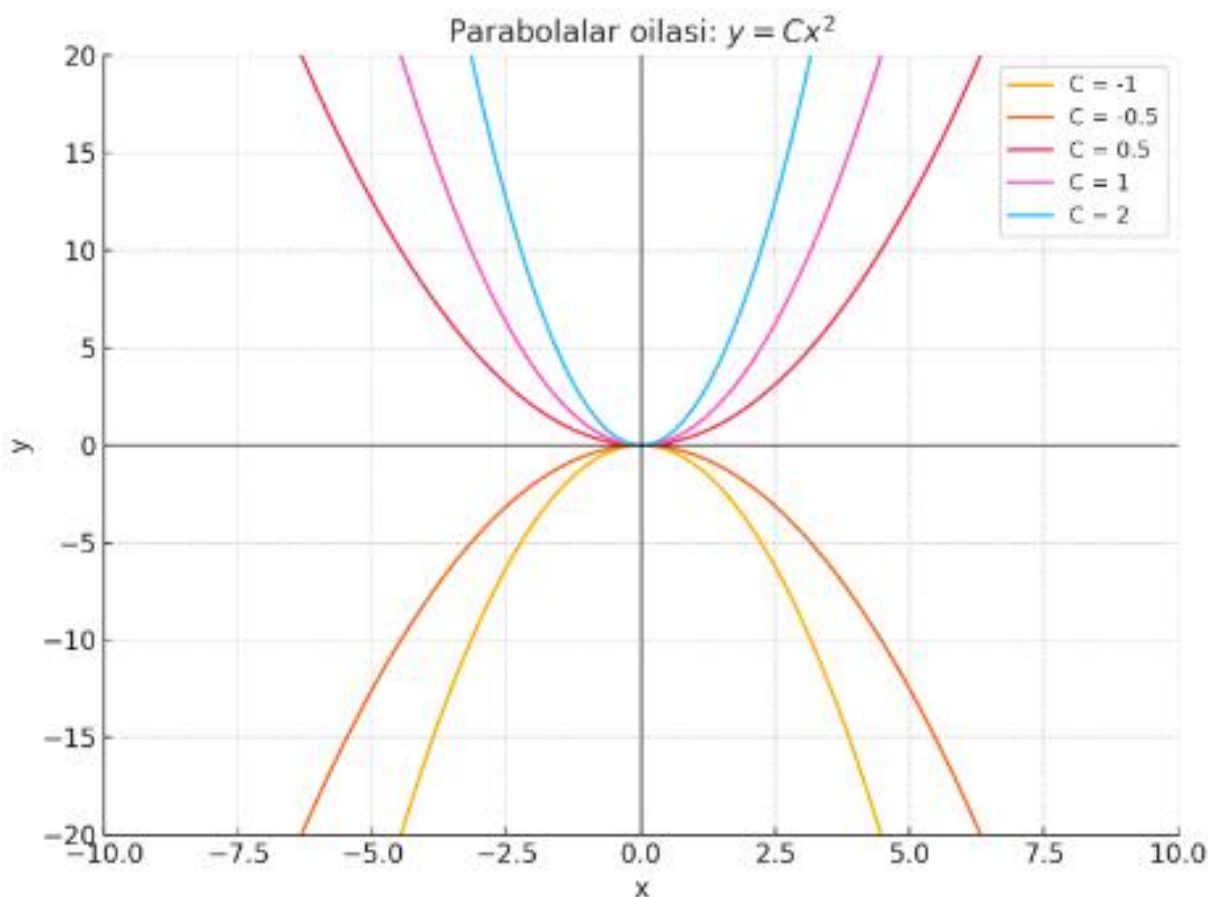
$$\frac{dy}{dx} = 2Cx$$

Bunga oila tenglamasidan topilgan  $C = \frac{y}{x^2}$  qiymatni qo'yib, berilgan oilaning

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

differensial tenglamasini hosil qilamiz.

Bu differensial tenglama  $x \neq 0$  bo'lganda, ya'ni  $O_y$  o'qdagi nuqtalarga ega bo'lmagan har qanday sohada ma'noga ega.



3-rasm

### 5. Birinchi tartibli differensial tenglamani taqribiy yechish (Eylar usuli).

Birinchi tartibli differensial tenglama integral egri chizig'ini taqribiy yasashning quyidagi usulini qaraymiz.

Hosilaga nisbatan yechilgan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

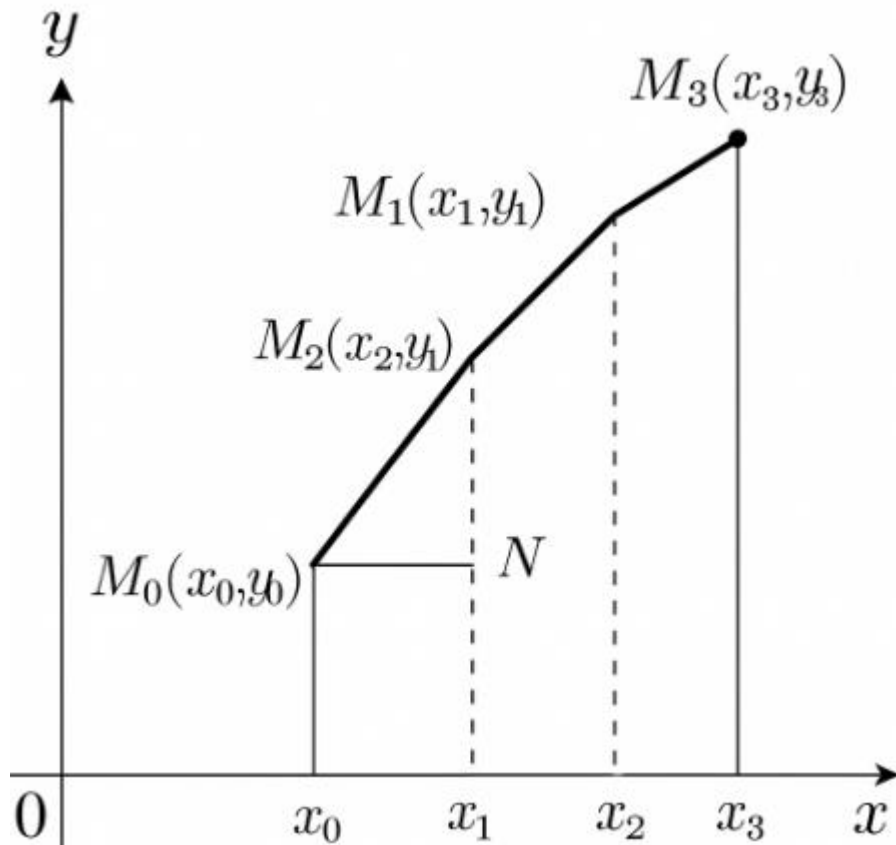
Differensial tenglama berilgan bo'lsin.

Bu tenglamaning  $x = x_0$  bo'lganda  $y = y_0$  boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topish talab etiladi. Geometrik nuqtai nazardan biz  $M(x_0, y_0)$  nuqtadan o'tuvchi integral egri chiziqni topishimiz kerak. Eylar usuli izlanayotgan integral egri chiziqning taqribiy tasviri deb qarash mumkin bo'lgan biror siniq chiziq yasashga keltiriladi.

$Oxy$  tekislikda  $Oy$  o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz(4-rasm):

$$x = x_0; x = x_1; \dots, x = x_n.$$

Bunda  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$  bo'lsin.



4-rasm

$M(x_0, y_0)$  nuqta orqali o'tadigan integral egri chiziq bu to'g'ri chiziqqa urinib o'tishi ravshan. Bu to'g'ri chiziqda  $M_1(x_1, y_1)$  nuqtani olamiz.

$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$  qiymat yechimning  $x = x_1$  bo'lgandagi taqribiy qiymati bo'ladi.  $M_1(x_1, y_1)$  nuqtadan burchak koeffitsienti  $y_{x=x_1} = f(x_1, y_1)$  bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz:

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

Bu to'g'ri chiziqda  $M_2(x_2, y_2)$  nuqtani olamiz.

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

qiymat yechimning  $x = x_2$  bo'lganda taqribiy qiymati bo'ladi.  $M_2(x_2, y_2)$  nuqtadan yana to'g'ri chiziq o'tkazamiz va hokazo. Shu usul bilan yasalgan siniq chiziq Eylerning siniq chizig'i deb ataladi. Yetarlicha qisqa  $M(x_0, y_0)$  nuqta orqali o'tadigan Eylerning siniq chizig'i shu nuqtadan o'tadigan integral egri chiziq haqida tasavvur berishini kutish mumkin.

Endi  $x$  ning berilgan  $x_0$  ga yaqin qiymatida  $\bar{y}$  ning qiymatini toppish kerak bo'lsin.  $[x_0, x]$  oraliqni bo'laklarga ajratamiz:



orttirmasining qiymatlari joylashgan va nihoyat, beshinchi ustunda taqqoslash uchun

$y = e^{\frac{x^2}{4}}$  yechimning aniq qiymatlari keltirilgan.

$x_i$	$y_i$	$f(x_i, y_i) = \frac{x_i y_i}{2}$	$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \frac{x_i y_i}{2} \cdot 0,1$	$y = e^{\frac{x^2}{4}}$
$x_0 = 0$	1	0	0	1
$x_1 = 0,1$	1	0,05	0,005	1,0025
$x_2 = 0,2$	1,005	0,1005	0,0101	1,01
$x_3 = 0,3$	1,0151	0,1523	0,0151	1,0227
$x_4 = 0,4$	1,0303	0,2061	0,0206	1,0408
$x_5 = 0,5$	1,0509	0,2627	0,0263	1,0645
$x_6 = 0,6$	1,0772	0,3232	0,0323	1,0942
$x_7 = 0,7$	1,1095	0,3883	0,0388	1,1303
$x_8 = 0,8$	1,1483	0,4593	0,0459	1,1735
$x_9 = 0,9$	1,1942	0,5374	0,0537	1,2244

Hisoblash ishlari quyidagicha ishlatiladi:

$y_1 - y_0$  ayirmani hisoblaymiz; bu ayirmaga  $y_0$  ni qo'shib,  $y_1$  ni hosil qilamiz;  $y_2 - y_1$  ayirmani topamiz; bunga  $y_1$  ni qo'shib,  $y_2$  ni topamiz va hokazo.

Jadvaldan  $x = 0,9$  bo'lganda  $\bar{y} = 1,1942$  bo'lishini ko'ramiz.

Berilgan boshlang'ich qiymatlarda qaralayotgan tenglamaning yechimi  $y = e^{\frac{x^2}{4}}$  funksiya ekaniga bevosita tekshirib ko'rish bilan ishonish mumkin.

Demak, bu funksiyaning  $x = 0,9$  bo'lgandagi aniq qiymati:

$(y)_{x=0,9} = e^{\frac{0,81}{4}} = 1,2244$ . bundan ko'rinadiki, tenglamani taqribiy yechishda yo'l qo'yilgan xato 0,031 dan kichik, bu esa 2,5% ni tashkil qiladi.

### Mavzularga doir misollar

1. Ixtiyoriy  $C$  o'zgarmas miqdorlarga bog'liq bo'lgan  $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$

funksiyaga mos  $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$  differensial tenglamani

qanoatlantirishini isbotlang.

2. Ixtiyoriy  $C$  o'zgaras miqdorlarga bog'liq bo'lgan  $y = Cx + C - C^2$  funksiyaga mos  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$  differensial tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.
3. Ixtiyoriy  $C$  o'zgaras miqdorlarga bog'liq bo'lgan  $y^2 = 2Cx + C^2$  funksiyaga mos  $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$  differensial tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.
4. Ixtiyoriy  $C$  o'zgaras miqdorlarga bog'liq bo'lgan  $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2C}{1+C}$  funksiyaga mos  $xy\left|1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right| = (x^2 - y^2 - a^2)\frac{dy}{dx}$  differensial tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.
5. Ixtiyoriy  $C$  o'zgaras miqdorlarga bog'liq bo'lgan  $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3$  funksiyaga mos  $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  differensial tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.
6. Ixtiyoriy  $C$  o'zgaras miqdorlarga bog'liq bo'lgan  $y = (C_1 + C_2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$  funksiyaga mos  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2k\frac{dy}{dx} + k^2y = e^x$  differensial tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.
7. Ixtiyoriy  $C$  o'zgaras miqdorlarga bog'liq bo'lgan  $y = C_1e^{-a\arcsin x} + C_2e^{-a\arcsin x}$  funksiyaga mos  $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$  differensial tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.
8. Ixtiyoriy  $C$  o'zgaras miqdorlarga bog'liq bo'lgan  $y = \frac{C_1}{x} + C_2$  funksiyaga mos  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$  differensial tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

## Savollar

- 1) Differensial tenglamaga ta'rif bering?
- 2) Differensial tenglamani integrallash qachon talab etiladi?
- 3) Differensial tenglamaning tartibi deb nimaga aytiladi?
- 4) Differensial tenglamaning integral egri chiziqlarini tushuntiring?
- 5) Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb nimaga aytiladi?
- 6) Birinchi tartibli differensial tenglamani taqribiy yechish qanday usulini bilasiz?