5-mavzu: Birinchi tartibli tenglama uchun Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi

Reja:

1) Birinchi tartibli tenglama uchun Koshi masalasi.
2) Yechimning mavjudligi va yagonaligi
3) Ketma-ket yaqinlashishlarning tekis yaqinlashuvchiligi.
4) Misollar yechish

Differensial tenglamaning berilgan $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlangich shart bo‘yicha xususiy yechimini topish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi. $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlangich shartning berilishi izlanayotgan xususiy yechimga mos integral egri chizik utishi kerak bo‘lgan $P_0(x_0, y_0)$ nuqtaning berilishini bildiradi. Shunday qilib, Koshi masalasini

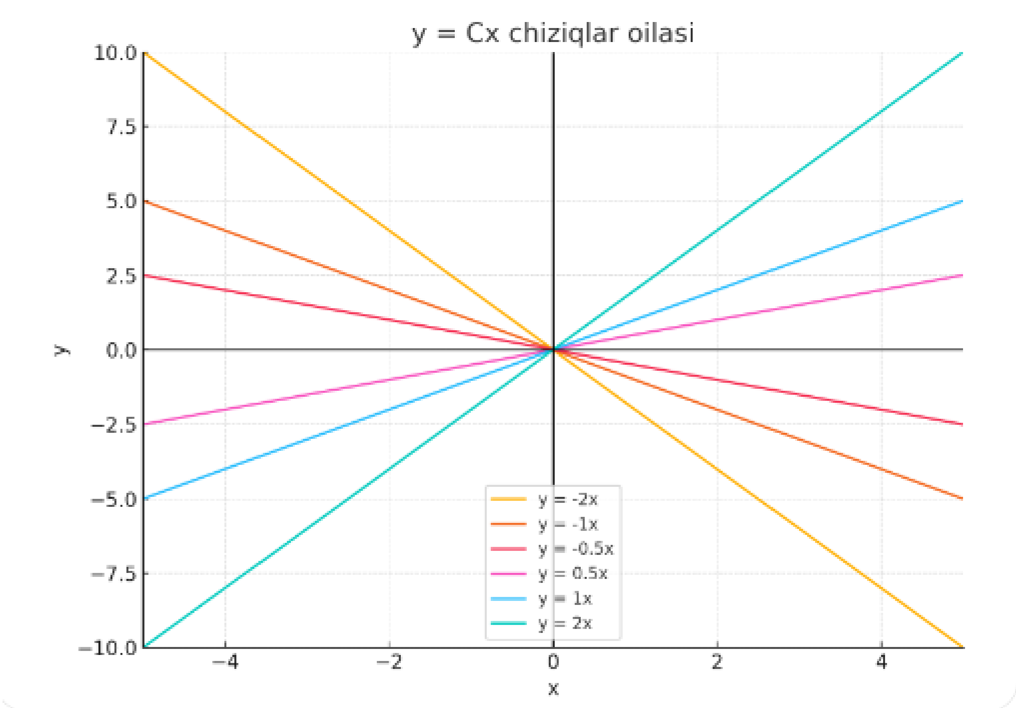
yechish — integral egri chiziqlar oilasi orasidan berilgan nuqtadan utadiganini tanlab olish demakdir. Bu masala har doim ham yechimga egami? Bu savolga kuyidagi teorema javob beradi (isbotni keltirmay, quyidagi teorema bayoni bilan cheklanamiz).

Teorema. (Koshi masalasi yechimning mavjudligi va yagonaligi). Agar $f(x, y)$ funksiya va uning $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilasi $P(x_0, y_0)$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror D

Sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning $x = x_0$ da $\varphi(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ yechimi mavjud va yagonadir.

Bu geometrik jihatdan quyidagini bildiradi: teoremaning shartlari bajariladigan har bir nuqta orqali yagona integral egri chiziq o‘tadi.

Teoremaning shartlari buziladigan nuqtalar maxsus nuqtalar deyiladi. Maxsus nuqtalar orqali, yo birorta ham integral egri chiziq o‘tmaydi, yo bir nechta chiziq o‘tadi. Masalan, $y' = \frac{y}{x}$ tenglama $y = Cx$ umumiy yechimga ega, bu integral egri chiziq oilasi koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar dastasidir (10-rasm).

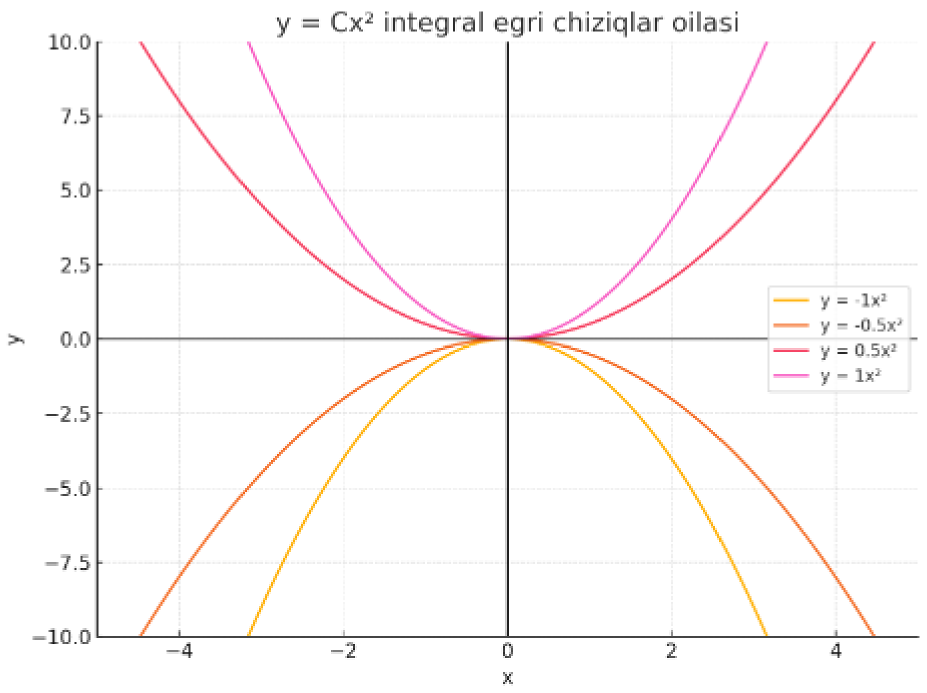


10-rasm

$x=0$ da (ordinatalar o‘qida) va $O(0,0)$ nuqtada teorema sharti buziladi. Tekislikning, ko‘rsatilgan nuqtalaridan tashqari, istalgan nuqtasi orqali $y=Cx$ oilaning bir to‘g’ri chizig’i o‘tadi. Teorema sharti buzilgan $O(0,0)$ nuqta orqali cheksiz ko‘p to‘g’ri chiziq o‘tadi. Oy o‘qining boshqa nuqtalari orqali bitta ham to‘g’ri chiziq o‘tmaydi.

Bu misolda $O(0,0)$ nuqta tugun deyiladi. Bunday holda har bir integral egri chiziq maxsus nuqtada o‘z yunalishiga ega bo‘ladi.

$y'=\dfrac{2y}{x}$ tenglamani ham tekshiraylik. Uning umumiy yechimi $y=Cx^2$ dan iborat.



11-rasm

Shunday qilib, umumiy yechim uchi koordinatalar boshida bo‘lib absissalar o‘qida urinadigan parabolalar oilasidan iborat ekan. Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishining umumiy ko‘rinishi 11-rasmda ko’rsatilgan. Integral egri chiziqlari ana shunday joylashgan differensiyal tenglamaning maxsus nuqtasi tugun deyiladi.

$y' = -\frac{y}{x}$ tenglama uchun umumiy integral $xy = C$ dan, ya’ni asimtotalari koordinata o‘qlaridan iborat bo‘lgan giperbolalar oilasidan iborat. Xususiy holda, $C = 0$ da $x = 0$ va $y = 0$ (koordinatalar o‘qlari) ni hosil qilamiz. Bu integral egri chiziqlar koordinatalar boshidan o‘tadi, qolgan hamma chiziqlar esa maxsus nuqta orqali o‘tmaydi. Bu hol 12-rasmda tasvirlangan; bu turdagi maxsus nuqta egar deyiladi.

$y' = \frac{x+y}{x-y}$ differensiyal tenglama esa $y = ux$ o‘rniga qo‘yish natijasida

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

ko‘rinishga keladi, bu yerdan o‘zgaruvchilarni ajratib, integrallasak:

$$\ln C + arctgu - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x$$

yoki

$$x\sqrt{1+u^2} = Ce^{arctgu}$$

Eski o‘zgaruvchilarga qaytsak,

$$\sqrt{1+u^2} = Ce^{arctg\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Qutib koordinatalarga $(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi)$o‘tib, oxirgi yechimni $\rho = Ce^{\varphi}$ ko‘rinishga keltiramiz. Bu koorduinatalar boshi atrofida cheksiz sondagi ($\varphi=-\infty$ *da*) o‘ramlar hosil qiluvchi logarifmik spirallar oilasidir. Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar oilasining ko‘rinishi 13-rasimda keltirilgan. Bunday maxsus nuqta fokus deb ataladi.

Nihoyat $y' = -\frac{x}{y}$ tenglamani qaraylik. Bu tenglamaning umumiy yechimi $x^2+y^2=C^2$na, ya’ni markazi koordinatalar boshida bo‘lgan aylanalar oilasini beradi. Maxsus nuqta orqali bitta ham integral egri chiziq o‘tmaydi. Bunday maxsus nuqta markaz deyiladi.

Koshi masalasi yechiming mavjudligi va yagonaligi.

Ushbu

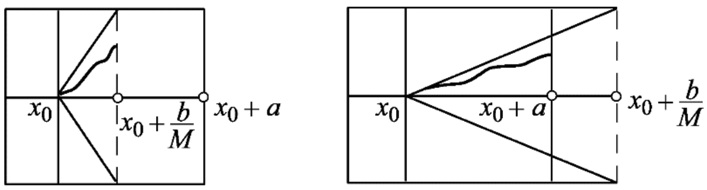
$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (5.1) \\ y\big|_{x_0} = y_0 & (5.2) \end{cases} \qquad (K)$$

Koshi masalasiga qaytaylk. Bu masala – (x_0, y_0) nuqta orqali berilgan differensial tenglamaning integral chizig`ini o`tkazish masalasi.

Qo’yilgan (K) Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi uchun yetarli shart quyidagi teoremada keltirilgan.

Teorema (MYaT). Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya ushbu $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ $(a>0, b>0)$ to’rtburchakda uzluksiz va y argumentga nisbatan Lipshits shatini qanoatlantirsin. $f(x,y)$ funksiya chegaralangan va yopiq $T\subset\mathbb{R}^2$ to’plamda uzluksiz bo’lgani uchun u shu T da chegaralangan; demak, shunday $M>0$ son mavjudki, barcha $(x,y)\in T$ nuqtalar uchun $|f(x,y)|\le M$ bo’ladi.

$h=\min\{a, \frac{b}{M}\}$ $(h>0)$ deylik. U holda (K) Koshi masalasining $I=[x_0-h, x_0+h]$ oraliqda aniqlangan yechimi mavjud va bu yechim yagonadir (6- rasm).



5- rasm.

Isbotni bir necha qismga bo`lib bajaramiz.

1. Integral tenglamaga o’tish. Faraz qilaylik, $y = y(x)$ funksiya (K) Koshi masalasining biror $I, x_0 \in I,$ oraliqda aniqlangan yechimi bo’lsin. Shu oraliqda bu funksiya (I.9.1) tenglamani va (I.9.2) shartni qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} y'(s) = f(s, y(s)),\ s \in I, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Bu yerdagi birinchi ayniyatning har ikkala tomoni I oraliqda uzluksiz funksiyadan iborat. Uni $s = x_0$ dan $s = x \in I$ gacha integrallaymiz va boshlang`ich shartdan foydalanamiz:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds,\ x \in I$$

Demak, $y = y(x) \in C^1(I)$ yechim I oraliqda ushbu

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{5.3}$$

integral tenglamani qanoatlantiradi.

Endi faraz qilaylik, $y = y(x) \in C(I)$ funksiya (5.3) integral tenglamaning $I, x_0 \in I,$ oraliqda yechimi bo’lsin:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds,\ x \in I.$$

Bu ayniyatning o’ng tomonidagi funksiya I oraliqda uzluksiz differinsiallanuvchi (integral ostidagi funksiya uzluksiz funksiyalar kompozitsiyasi sifatida uzluksiz); demak, uning chap tomoni ham shu xususiyatga ega, ya’ni aslida $y(x) \in C^1(I)$. Bu ayniyatni differensiallab, $y(x) \in C^1(I)$ funksiya I oraliqda (5.1) differensial tenglamani qanoatlantirishini ko’ramiz, ayniyatda $x = x_0$ deb esa (5.2) boshlang’ich shartning bajarilishiga ham ishonch hosil qilamiz. Demak, 5.3) integral tenglamaning $y = y(x) \in C(I)$ yechimi (K) Koshi masalasining I oraliqda aniqlangan yechimidan iborat.

Shunday qilib, (K) Koshi masalasini yechish (5.3) integral tenglamaning $y \in C(I),\ x_0 \in I$, yechimini topishga teng kuchlidir. Endi biz (K) masala o'rniga unga ekvivalent bo'lgan (5.3) integral tenglamani yechamiz.

2. Yechimga ketma-ket yaqinlashishlarni qurish. (5.3) integral tenglamani ketma-ket yaqinlashishlar metodi yordamida yechamiz. Boshlang'ich yaqinlashish sifatida ushbu

$$y_0(x) = y_0 \tag{5.4$_0$}$$

o'zgarmas funksiyani tanlaymiz. Endi ketma-ket quyidagi funksiyalarni kiritamiz:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))ds, \tag{5.4$_1$}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds, \tag{5.4$_2$}$$

…………………………..

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds, \tag{5.4$_n$}$$

…………………………...

Bu formulalardagi integrallarning mavjud bo'lishini, ya'ni $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), ...$ ketma-ket yaqinlashishlarning aniqlangan bo'lishini ta'minlashimiz kerak.

Agar

$$| x - x_0 | \le a \tag{5.5}$$

bo'lsa, (5.4$_1$)dagi integral mavjud va $y_1(x)$ uzluksiz funksiyadan iborat (integral ostidagi funksiya uzluksiz). (5.4$_2$)dagi integral aniqlangan bo'lishi uchun $(s, y_1(s))$ o'zgaruvchi nuqta T to'rtburchakdan chiqib ketmasligi kerak. (5.4$_1$)ga ko'ra

$$| y_1(x) - y_0 | = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))ds \right| \le$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} | f(s, y_0) | ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M ds \right| = M | x - x_0 |.$$

Bundan ravshanki, $| y_1(x) - y_0 | \leq b$ bo'lishi uchun $M | x - x_0 | \leq b$, ya'ni

$$| x - x_0 | \leq \frac{b}{M} \tag{5.6}$$

shartning bajarilishi yetarli. Demak, (5.5) va (5.6) shartlar birgalikda o'rinli, ya'ni

$| x - x_0 | \leq h$ ($h \leq a$ va $h \leq \frac{b}{M}$) bo'lganda $(x, y_1(x)) \in T$ bo'ladi. Bundan keyin x o'zgaruvchi uchun ana shu $| x - x_0 | \leq h$ shart bajarilgan deb hisoblaymiz. Endi tushunarliki, agar $y_k(x)$ funksiya $| x - x_0 | \leq h$ oraliqda aniqlangan, grafigi T da joylashgan va uzluksiz bo'lsa, $y_{k+1}(x)$ funksiya ham shu xususiyatlarga ega bo'ladi, chunki

$$| y_{k+1}(x) - y_0 | = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s)) ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} | f(s, y_k) | ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M ds \right| = M | x - x_0 | \leq Mh \leq b.$$

Demak, matematik induksiya prinsipiga ko'ra $y_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ funksiyalarning barchasi $[x_0 - h, x_0 + h]$ oraliqda aniqlangan, grafiklari T da joylashgan va uzluksiz (aslida $y_n'(x)$ hosilalar ham uzluksiz, chunki (5.4$_n$) formulada integral ostidagi funksiya uzluksiz).

3. Ketma-ket yaqinlashishlarning tekis yaqinlashuvchiligi. Yuqorida aniqlangan $y_0(x), y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), ...$ uzluksiz funksiyalardan tuzilgan ketma-ketlikning $[x_0 - h, x_0 + h]$ oraliqda tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ushbu

$$y_0(x) + \big(y_1(x) - y_0(x)\big) + \big(y_2(x) - y_1(x)\big) + ... \tag{5.7}$$

funksional qatorning tekis yaqinlashishini asoslash kerak. Tekis yaqinlashish haqidagi Veyershtrass alomatidan foydalanamiz: agar $| u_n(x) | \leq c_n$, $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$ va $\sum_n c_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa,u holda $\sum_n u_n(x)$ qator I oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Teoremaning shartiga ko’ra $f(x,y)$ funksiya y o’zgaruvchiga nisbatan Lipshits shartini qanoatlantiradi:

$$\exists\, L>0 \mid f(x,u)-f(x,v)\mid \le L\mid u-v\mid \ \big((x,u)\in T,(x,v)\in T\big). \qquad (5.8)$$

Quyidagi baholashlarni bajaramiz.

$$|y_0(x)|=|y_0|,$$

$$|y_1(x)-y_0(x)| \ \le \left|\int_{x_0}^{x}|f(s,y_0)|\,ds\right| \le M\,|x-x_0|$$

$$\text{(chunki } T \text{ da } |f(x,y)|\le M), \qquad (5.9_1)$$

$$|y_2(x)-y_1(x)| \ = \left|\int_{x_0}^{x}(f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s)))ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}|f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))|\,ds\right| \overset{(8)}{\le} \left|\int_{x_0}^{x}L\,|y_1(s)-y_0(s)|\,ds\right| \overset{(9_1)}{\le}$$

$$\overset{(9_1)}{\le} \left|\int_{x_0}^{x}LM\,|s-x_0|\,ds\right| = ML\frac{|x-x_0|^2}{2}, \qquad (5.9_2)$$

$$|y_3(x)-y_2(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x}|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))|\,ds\right| \overset{(8)}{\le}$$

$$\overset{(8)}{\le} \left|\int_{x_0}^{x}L\,|y_2(s)-y_1(s)|\,ds\right| \overset{(9_2)}{\le}$$

$$\overset{(9_2)}{\le} \left|\int_{x_0}^{x}LML\frac{|s-x_0|^2}{2}ds\right| = ML^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}, \qquad (5.9_3)$$

……………………………………………………………………………..

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \ \le ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}, \qquad (5.9_n)$$

………………………………………………………………………………

Demak,

$$|x-x_0|\le h \ \text{ bo'lganda } \ |y_n(x)-y_{n-1}(x)| \ \le ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}$$

va ushbu $\sum_n ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun (Dalamber alomatiga ko'ra $D = 0 < 1$) (5.7) funksional qator I oraliqda tekis yaqinlashuvchi.

4. Ketma-ket yaqinlashishlar limitining yechim ekanligi. Biz uzluksiz funksyalardan tuzilgan $y_0(x), y_1(x), y_2(x),..., y_n(x),...$ ketma-ketlikning I oraliqda tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatdik. Demak, analizdan ma'lum teoremaga ko'ra (uzluksiz funksyalarning tekis limiti uzluksiz)

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \; |x - x_0| \le h, \tag{5.10}$$

limit funksiya I oraliqda uzluksiz. Uning (5.3) integral tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. (5.4*n*) formulaga qaytaylik:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds. \tag{5.4$_n$}$$

Agar

$$n \to \infty \quad \text{bo'lganda} \quad \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \to \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))ds \tag{5.11}$$

ekanligini ko'rsatsak, u holda (5.4*n*) tenglikda limitga o'tib, (5.10) funksiyaning (5.3) integral tenglama yechimi ekanligini asoslagan bo'lamiz:

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))ds, \; x \in I. \tag{5.12}$$

(5.11) dagi tasdiq (5.8) Lipshits sharti va (5.10) dagi yaqinlashishning tekis ekanligidan kelib chiqadi: yetarlicha katta n nomerlar uchun barcha $x \in I$ nuqtalarda $|y_{n-1}(x)) - \phi(x)| < \varepsilon$ bo'lganligiga ko'ra

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds\right| \le \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, \varphi(s)|\, ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} L\,|y_{n-1}(s)) - \varphi(s)|\, ds\right| < < L\varepsilon\,|x - x_0| \le \le Lh\varepsilon.$$

5. Yechimning yagonaligi. Biz (5.3) integral tenglamaning $y = \phi(x)$, $x \in I$, yechimini topdik. Uning har qanday yechimi ana shu yechim bilan ustma-ust tushishini ko'rsatamiz.

(5.3) tenglamaning ixtiyoriy $y = \psi(x)$, $x \in I$, yechimini qaraylik. Demak,

$$\psi(x) \in C(I) \text{ va } \quad \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\psi(s))ds\ ,\ x \in I. \tag{5.13}$$

$y = \phi(x)$ yechimga intiluvchi $y_n(x)$ ketma-ket yaqinlashishlar bilan $y = \psi(x)$ yechim orasidagi farqning modulini baholaymiz. Quyidagilarga egamiz:

$$|y_0(x) - \psi(x)| \overset{(4_0),(13)}{=} \left| \int_{x_0}^{x} f(s,\psi(s))ds \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} |f(s,\psi(s))|\, ds \right| \le M\,|x - x_0|\ , \tag{5.14$_1$}$$

$$|y_1(x) - \psi(x)| \overset{(4_1),(13)}{=} \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, y_0(s)) - f(s,\psi(s)))ds \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0(s)) - f(s,\psi(s))|\, ds \right| \overset{(8)}{\le} \overset{(8)}{\le} \left| \int_{x_0}^{x} L\,|y_0(s) - \psi(s)|\, ds \right| \overset{(14_1)}{\le}$$

$$\overset{(14_1)}{\le} \left| \int_{x_0}^{x} LM\,|s - x_0|\, ds \right| = = ML\frac{|x - x_0|^2}{2}, \tag{5.14$_2$}$$

. . . .

$$|y_n(x) - \psi(x)| \le ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in I. \tag{5.14$_n$}$$

Oxirgi tengsizlikda $x \in I$ nuqtani tayinlab, $n \to \infty$da limitga o'tamiz. U holda $\frac{a^n}{n!} \to 0$ bo`lganligi uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le 0\ , x \in I\ \Rightarrow\ \varphi(x) \equiv \psi(x),\ x \in I\ .\text{C}$$

Eslatma. (I.9.14$_n$) tengsizlikdan (K) Koshi masalasining yechimi $y = \phi(x)$ va unga ketma-ket yaqinlashishlar orasidagi farqning baholanishi kelib chiqadi:

$$|y_n(x) - \phi(x)| \le ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\ x \in I.$$

Misol. Noma'lum $y = y(x)$ funksiyaga nisbatan qo'yolgan ushbu

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Koshi masalasini ketma-ket yaqinlashishlar metodi yordamida yeching.

□Berilgan tenglamaning o’ng tomonidagi $f(x,y)=y$ funksiya MYaT shartlarini ixtiyoriy $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\|\, |x|\le a, |y-1|\le b\}$ $(a>0,\, b>0)$ to’rtburchakda qanoatlantiradi. Ravshanki, qaralayotgan misol uchun $M=\sup_T |f(x,y)|=\sup_T |y|=1+b$ va $h=\min\left\{a, \frac{b}{1+b}\right\}<1$. Berilgan Koshi masalasi ushbu

$$y=1+\int_0^x y(s)ds$$

integral tenglamaga ekvivalent. Bu tenglamani ketma-ket yaqinlashishlar metodi yordamida yechamiz:

$$y_0(x)=1,$$

$$y_1(x)=1+\int_0^x y_0(s)ds=1+\int_0^x 1ds=1+x,$$

$$y_2(x)=1+\int_0^x y_1(s)ds=1+\int_0^x (1+s)ds=1+x+\frac{x^2}{2!},$$

$$y_3(x)=1+\int_0^x y_2(s)ds=1+\int_0^x (1+s+\frac{s^2}{2!})ds=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Teoremada isbotlandiki, bu $y_n(x)$ ketma-ket yaqinlashishlar berilgan masalaning yagona yechimi bo’lmish $y=e^x$ funksiyaga $|x|\le h$, $h=\min\left\{a, \frac{b}{1+b}\right\}<1$, oraliqda tekis yaqinlashadi:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Oxirgi formula, analizdan ma’lumki, aslida ixtiyoriy $x\in\mathbb{R}$ uchun o’rinli (bu yerdagi qator ixtiyoriy chegaralangan oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo’ladi). C

Eslataylikki, agar $D \subset \mathbb{R}^2$ sohaning har bir nuqtasidan $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning yagona integral chizig'i (yechimi) o'tsa, D soha shu tenglama uchun yagonalik sohasi deyiladi.

Quyidagi teorema isbotlangan teoremaning bevosita natijasidir.

Teorema (soha uchun MYaT). Agar $f(x, y)$ funksiya $D \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz va ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in D$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida y bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda D soha $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning yagonalik sohasi bo'ladi. Xususan, agar D sohada $f(x, y)$ funksiya va uning $f'_y(x, y)$ hosilasi uzluksiz bo'lsa, D soha $y' = f(x, y)$ differensial tenglama uchun yagonalik sohasidir.

Misol. Ushbu $y' = x^2 y^3 - \ln y + 1$ differensial tenglama uchun biror yagonalik sohasini ko'rsating.

Ravshanki, $f(x, y) = x^2 y^3 - \ln y + 1$ funksiya va uning $f'_y(x, y) = 3x^2 y^2 - \dfrac{1}{y}$ hosilasi $y > 0$ yarim tekislikda uzluksiz. Demak, shu $y > 0$ yarim tekislik berilgan tenglama uchun yagonalik sohasidir, ya'ni $y > 0$ yarim tekislikning har bir nuqtasidan $y' = x^2 y^3 - \ln y + 1$ differensial tenglamaning yagona yechimi o'tadi. □

Agar $y' = f(x, y)$ tenglamaning o'ng tomonidan faqatgina uzluksiz bo`lishni talab qilsak, u holda berilgan nuqtadan o'tuvchi yechim mavjud bo`ladi, lekin umumiy holda yechimning yagonalik xossasi bo'lmaydi.

Teorema (Peano). Agar $f(x, y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lsa, D sohaning har bir nuqtasidan $y' = f(x, y)$ tenglamaning kamida bitta yechimi o'tadi.

Bu teoremani isbotlamaymiz. Isboti analizning nozik tushunchalariga tayanadi.

Agar $f(x, y)$ funksiyadan uzluksizlikdan boshqa shart talab qilmasak, nuqtadan o'tuvchi yechimning yagonaligi haqida hech narsa deb bo'lmaydi.

M. A. Lavrentev tekislikda uzluksiz bo'lgan shunday $f(x, y)$ funksiya qurganki, u orqali tuzilgan $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqta orqali cheksiz ko'p yechimi o'tadi.

Quyidagi tenglamalarning ko'rsatilgan shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

1. $x^2 y' \cos y + 1 = 0,\ y \to \dfrac{16}{3}\pi,\ x \to +\infty.$

2. $x^2 y' + \cos 2y = 1,\ y \to \dfrac{10}{3}\pi,\ x \to +\infty.$

3. $x^3 y' - \sin y = 1,\ y \to 5\pi,\ x \to +\infty.$

4. $(1 + x^2) y' - \dfrac{1}{2}\cos^2 2y = 0,\ y \to \dfrac{7}{2}\pi,\ x \to -\infty.$

5. $e^y = e^{4y} y' + 1,\ y$ chegaralangan $x \to +\infty$ da.

6. $(x+1)y' = y - 1,\ y$ chegaralangan $x \to +\infty$ da.

7. $y' = 2x(\pi + y),\ y$ chegaralangan $x \to \infty$ da.

8. $x^2 y' + \sin 2y = 1,\ y \to \dfrac{11}{4}\pi,\ x \to +\infty.$

Savollar

1) Koshi masalasi nima? Uning umumiy ko‘rinishini yozing.
2) Koshi masalasiga qanday shartlar beriladi?
3) Yechimning mavjudligi va yagonaligini ta'minlovchi shartlarni sanab bering.
4) Peano teoremasi qanday mavjudlik haqida ma’lumot beradi?
5) Agar f(x,y) funksiyasi uzluksiz bo‘lsa, yechim har doim mavjudmi?