

6-mavzu: Differensial tenglama yechimining silliqliqi. Differensial tenglama yechimining parametrlarga va boshlang'ich shartlarga bog'liqligi. Maxsus yechimlar

Reja:

1. Differensial tenglama yechimining silliqliqi.
2. Differensial tenglama yechimining parametrlarga va boshlang'ich shartlarga bog'liqligi.
3. Maxsus yechimlar

Differensial tenglama yechimining silliqliqi

Differensial tenglama yechimining silliqliqi bu yechimning uzluksizlik va hosilalarning mavjudligi xususiyatlarini o'rganadi.

1. Silliqlik nima?

Matematikada silliqlik deganda funksiya va uning hosilalari uzluksiz bo'lishi tushuniladi.

- Agar funksiya uzluksiz bo'lsa — u C^0 sinfga tegishli deyiladi.
- Agar funksiya uzluksiz hosilaga ega bo'lsa — C^1 sinf.
- Agar funksiya n-marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa — C^n sinf.
- Agar u har qanday tartibdagi hosilalarga ega bo'lsa — C^∞ sinf (cheksiz silliq).

2. Differensial tenglamada silliqlik

Agar biz quyidagi Koshi masalasini qarasak

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Shunda yechimning silliqliqi $f(x, y)$ funksiyaning o'ziga bog'liq:

- Agar $f(x, y)$ va uning kerakli tartibdagi xususiy hosilalari uzluksiz bo'lsa, yechim ham shuncha marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.
- Agar f faqat uzluksiz bo'lsa, yechim ham uzluksiz va differensiallanuvchi bo'ladi, lekin yuqori tartib hosilalari mavjud bo'lmasligi mumkin.

3. Silliqlik teoremasi (oddiy hol)

Agar

- $f(x,y)$ va $\frac{\partial f}{\partial y}$ uzluksiz bo'lsa,
- boshlang'ich nuqta (x_0, y_0) funksiyaning aniqlanish sohasida bo'lsa,

unda Koshi masalasi yagona yechimga ega va bu yechim C^1 sinfga mansub bo'ladi.

Agar f o'zi C^n sinf bo'lsa, yechim ham C^{n+1} sinfga kiradi.

4. Misol

Tenglama:

$$y' = \sin(x) + y, \quad y(0) = 1$$

Bu yerda $f(x,y)=\sin(x)+y$ — cheksiz differensiallanuvchi, demak yechim ham C^∞ sinfga kiradi.

5. Fizik ma'nosi

Fizik modellashtirishda silliqlik deganda jarayon keskin sakrashsiz o'zgarishi tushuniladi. Masalan:

- Silliq yechim: to'lqin balandligi vaqt bo'yicha asta-sekin o'zgaradi.
- Nosilliq yechim: elektr impulsida keskin sakrash bo'ladi (bu holda hosila uzluksiz emas).

Birinchi tartibli differensial tenglamaning maxsus yechimlari

Bizga

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1)$$

differensial tenglamaning umumiy integrali

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2)$$

bo'lsin. (2) tenglamaga mos bo'lgan egri chiiziqilar oilasining o'ramasi mavjud deb faraz qilaylik. Bu o'rama o'z navbatida (1) differensial tenglamaning integral egri chizig'i bo'lishini isbot qilamiz.

Haqiqtan ham, o'rama o'zining har bir nuqtasi bilan oilaning biror egri chizig'iga urinadi, ya'ni u bilan umumiy nuqtaga o'rama bilan oilaning egri chizig'i x, y, y' sonlar (1) tenglamani qanoatlantiradi. Demak, shu tenglamaning xuddi o'zini o'rama har bir nuqtasining absissasi, ordinatasi va burchak koeffitsienti qanoatlantiradi.

Ammo bunday bo'lishi o'rama integral egri chiziqning o'zi, uning tenglamasi esa berilgan differensial tenglamaning yechimi ekanini bildiradi.

Umuman aytganda, o'rama oilaga tegishli egri chiziq bo'lmagani uchun uning tenglamasini (2) umumiy integraldan C ning hech bir xususiy qiymatida hosil qilib bo'lmaydi. Differensial tenglamaning umumiy integralidan C ning hech qiymatida ham hosil bo'lmaydigan va grafigi umumiy yechimga kirgan integral egri chiziq oilasining o'ramasidan iborat bo'lgan yechim differensial tenglamaning maxsus yechimi deyiladi.

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

Umumiy integral ma'lum bo'lsin; bundan va $\Phi'_c(x, y, C) = 0$ tenglamadan C ni yo'qotib $\varphi(x, y) = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Agar bu funksiya differensial tenglamani qanoatlantirsa (va (2) oilaga tegishli bo'lmasa), u holda u maxsus integral bo'ladi.

Maxsus yechimni tasvirlovchi egri chiziqning har bir nuqtasidan hech bo'lmaganda ikkitadan egri chiziq o'tadi, boshqacha aytganda, maxsus yechimning har bir nuqtasida yechimning yagonaligi buziladi.

Misol.

$$y^2(1 + (y')^2) = R^2$$

tenglamaning maxsus yechimi topilsin.

Yechish. tenglamaning umumiy integralini topamiz. Tenglamani y' ga nisbatan yechamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y} \quad (*)$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx$$

Bundan, integrallab,

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2$$

Umumiy integralni topamiz. Integral egri chiziq oilasi markazi absissalar o'qida bo'lib, radiusi R ga teng bo'lgan aylanalar oilasi ekanini ko'rish oson. $y = R$ va $y = -R$ to'g'ri chiziq egri chiziq oilasining o'ramasi bo'ladi.

$y = \pm R$ funksiyalar (1) differensial tenglamani qanoatlantiradi. Demak, bu tenglamaning maxsus integralidir.

Klero tenglamasi

Klero tenglamasi deb atalgan

$$y = x\varphi(y') + \omega(y') \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bunda φ va ω lar $\frac{dy}{dx}$ ning ma'lum funksiyasi.

Bu tenglama x va y ga nisbatan chiziqli tenglama.

Klero tenglamasiga yordamchi p parameter kiritish usuli bilan bajaramiz.

$$y' = p$$

deb belgilasak (1) tenglama

$$y = x\varphi(p) + \omega(p) \quad (1')$$

ko'rinishda yoziladi.

x ga nisbatan differensiallab,

$$p = \varphi(p) + (x\varphi'(p) + \omega'(p)) \frac{dp}{dx}$$

yoki

$$p - \varphi(p) = (x\varphi'(p) + \omega'(p)) \frac{dp}{dx} \quad (1'')$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamadan ba'zi yechimlarni birdan yozish mumkin:

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0$$

Shartni qanoatlantiruvchi p ning har qanday o'zgarmas $p = p_0$ qiymatida ayniyatga aylanadi.

Haqiqatan ham, p ning o'zgarmas qiymatida $\frac{dp}{dx} \equiv 0$, hosila aynan nolga teng va (1'') tenglamaning ikkala tomoni nolga aylanadi.

Har bir $p = p_0$, ya'ni $\frac{dy}{dx} = p_0$ qiymatga mos bo'lgan yechim x ning chiziqli funksiyasi bo'ladi (chunki $\frac{dy}{dx}$ hosila faqat chiziqli funksiyalar uchun o'zgarmas miqdor bo'ladi). Bu funksiyani topish uchun (1') tenglikka $p = p_0$ qiymatni qo'yish yetarli:

$$y = x\varphi(p_0) + \omega(p_0)$$

Agar bu yechi umumiy integraldanixtiyoriy o'zgarmas miqdorning hech bir qiymatida hosil bo'lmasa, u holda bu maxsus yechim bo'ladi.

Endi umumiy yechimni topamiz. Buning uchun (1'') tenglamani

$$\frac{dp}{dx} - x \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\omega'(p)}{p - \varphi(p)}$$

Ko'rinishda yozamiz va x ni p ning funksiyasi deb qaraymiz.

Bu holda hosil qilingan tenglama p ning x funksiyasiga nisbatan chiziqli differensial tenglama bo'ladi.

Uni yechib

$$x = \omega(p, C) \quad (2)$$

Ekanini topamiz. (1') va (2) tenglamalardan p parametrni yuqotsak, (1) tenglamaning umumiy integrali

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

ko'rinishda hosil bo'ladi.

Misol.

$$y = x(y')^2 + (y')^2 \quad (1)$$

tenglama berilgan

$y' = p$ deb olsak,

$$y = xp^2 + p^2 \quad (1')$$

Bo'ladi. x ga nisbatan differensiallab

$$p = p^2 + [2xp + 2p] \frac{dp}{dx} \quad (1'')$$

tenglamani hosil qilamiz.

Maxsus yechimni topamiz $p_0 = 0$ va $p_1 = 1$ bo'lganda $p = p^2$ bo'lgani uchun yechimlar chiziqli funksiyalardan iborat bo'ladi.

$$y = 0 \text{ va } y = x + 1$$

Bu funksiyalar xususiy yoki maxsus yechim bo'lishini umumiy integralni topganimizdan keyingina bilamiz. Umumiy integralni toppish uchun (1'') tenglamani

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{2p}{p - p^2} = \frac{2}{1 - p}$$

Ko'rinishda yozamiz va x ni erkli p o'zgaruvchining funksiyasi deb qaraymiz.

Hosil qilingan (ga nisbatan) chiziqli tenglamani integrallaymiz:

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2} \quad (1''')$$

(1') hamda (1''') tenglamalardan p ni yo'qotsak,

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2$$

Umumiy integral hosil bo'ladi.

$$y = 0$$

Dastlabki tenglamaning maxsus integrali bo'ladi, chunki bu yechim umumiy integraldan C ning hech bir qiymatida hosil bo'lmaydi.

$y = x + 1$ funksiya esa maxsus yechim bo'lmay, balki xususiy yechim bo'ladi, chunki bu yechim umumiy yechimdan $C = 0$ bo'lganda hosil bo'ladi.

Differensial tenglama yechimining parametrlarga va boshlang'ich shartlarga bog'liqligi.

1. Asosiy tushuncha

Differensial tenglama fizik tizimni ifodalaydi. Uning yechimi odatda ikki omilga bog'liq bo'ladi:

1. Tizim parametrlari (masalan, massasi m , qarshilik R , prujina qattiqligi k , parchalanish doimiysi λ , va hokazo).
2. Boshlang'ich shartlar ($y(0)$, $y'(0)$, yoki umumiy holda $x(t_0) = x_0$)

2. Oddiy misol (radioaktiv parchalanish)

Tenglama:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Yechim:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Parametr: λ — parchalanish tezligini belgilaydi

Boshlang'ich shart: $N(0) = N_0$

Agar λ katta bo'lsa, $N(t)$ tezroq kamayadi.

Agar N_0 katta bo'lsa, boshlang'ich miqdor yuqori bo'ladi, lekin kamayish qonuni o'zgarmaydi.

3. Tebranishli tizim (prujina – og‘irlik)

Tenglama:

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

Yechim parametrlarga qarab uch xil bo‘ladi:

- Agar $c=0$: so‘nmas tebranish

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Agar $c>0$: so‘nuvchi tebranish, amplituda vaqt o‘tishi bilan kamayadi
- Agar c juda katta: tebranish bo‘lmaydi, sekinlik bilan muvozanatga keladi

Parametrlar: m, c, k tizimning chastotasi va turg‘unligini belgilaydi.

Boshlang‘ich shartlar ($x(0), v(0)$) esa harakatning boshlanish shaklini belgilaydi.

Nazorat savollari

1. Differensial tenglama yechimi parametrga qanday bog‘liq?
2. Radioaktiv parchalanish yechimida λ kattalashsa, grafigi qanday o‘zgaradi?
3. Prujina–og‘irlik sistemasida m, c, k ortsa, tebranish chastotasiga qanday ta’sir qiladi?
4. Boshlang‘ich shartlarning yechim grafigiga ta’sirini izohlang.
5. Tizimning turg‘unligi parametr va boshlang‘ich shartlarga bog‘liqmi?