

## 7-mavzu: Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalarva ularni integrallash usullari

### Reja:

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglamaning ta'rifi.
2. Yechim mavjudligi va yagonaligi (Koshi masalasi nuqtai nazaridan).
3. Yechimlarni topish bosqichlari (algoritmi).
4. Integrallash usullari:
  - Yechib olinadigan tenglamalar;
  - Parametrli yechim usuli;
  - Yashirin yechimlar;
5. Fizikaga oid misollar.

### 1. Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglamaning ta'rifi

Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglama — bu birinchi tartibli oddiy differensial tenglama bo'lib, uning umumiy ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$F(x, y, y') = 0,$$

bu yerda:

- $x$  — mustaqil o'zgaruvchi,
- $y=y(x)$  — noma'lum funksiya,
- $y' = \frac{dy}{dx}$  — ushbu funksiyaning birinchi tartibli hosilasi,
- $F$  — uchta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan, uzluksiz yoki differensiallanuvchi funksiya.

Agar bu tenglamani hosilaga nisbatan  $y'$  ga nisbatan **yechib bo'lmasa**, ya'ni uni  $y' = f(x, y)$  ko'rinishida ifodalash imkoni bo'lmasa, u holda bunday tenglamalar **hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalar** deyiladi.

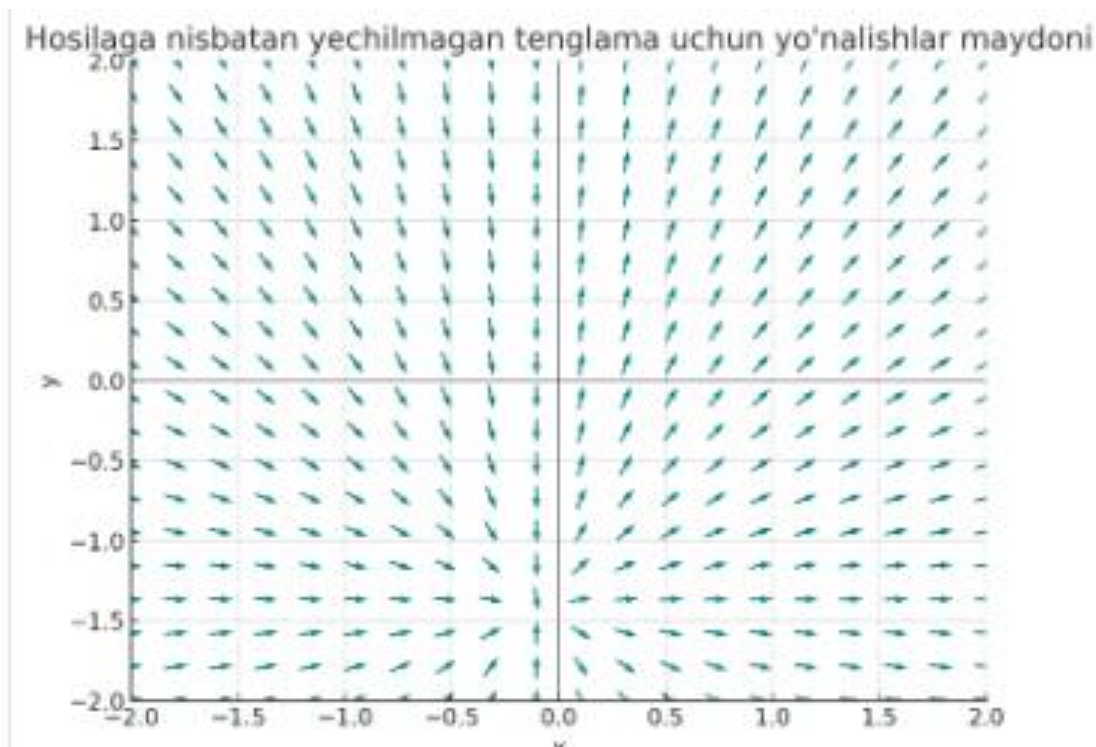
### Eslatma:

Aksincha, agar tenglama  $y'=f(x,y)$  ko'rinishida yozilsa, bu tenglama hosilaga nisbatan yechilgan (ya'ni aniq) tenglama hisoblanadi va uni integrallash ancha oson bo'ladi.

Misol:

$$y - xy' + \sqrt{1 + (y')^2} = 0$$

Bu tenglama  $y'$  ga nisbatan yechilgan emas. Shu sababli bu tenglama **hosilaga nisbatan yechilmagan** birinchi tartibli differensial tenglamadir.



Yuqoridagi grafikda hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglama:

$$y - xy' + \sqrt{1 + (y')^2} = 0$$

uchun yo'nalishlar maydoni (gradientlar) tasvirlangan.

- Har bir kichik o'q (vektor) integral chiziqning shu nuqtadagi yo'nalishini bildiradi.
- Bu yo'nalishlar orqali integral chiziqlar (ya'ni yechimlar) qanday harakatlanishini taxmin qilish mumkin.
- Grafik hosilani aniq ifodalab bo'lmaydigan hollarda, yechimlarning umumiy shaklini ko'rish imkonini beradi.

2. Yechim mavjudligi va yagonaligi (Koshi masalasi nuqtai nazaridan)

Koshi masalasi nima?

Koshi masalasi — bu differensial tenglama uchun boshlang'ich shart bilan berilgan masala bo'lib, umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = p_0 \end{cases}$$

ya'ni, funksiya nafaqat tenglamani qanoatlantirishi, balki berilgan nuqtada  $(x_0, y_0)$  qiymatga ega va shu nuqtada berilgan yo'nalishda  $(y'(x_0) = p_0)$  bo'lishi kerak.

Yechim mavjudligi va yagonaligi haqida teorema

Agar birinchi tartibli differensial tenglama quyidagicha berilgan bo'lsa:

$$F(x, y, y') = 0,$$

va bu tenglamani hosilaga nisbatan yechib, quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin bo'lsa:

$$y' = f(x, y),$$

u holda, **Cauchy–Lipschitz (Pikard) teoremasiga** ko'ra, boshlang'ich shart:

$$y(x_0) = y_0$$

bilan birga quyidagi shartlar bajarilsa:

- $f(x, y)$  funksiyasi  $x_0, y_0$  nuqta atrofida uzluksiz bo'lsa;
- $f(x, y)$  funksiyasi  $y$  bo'yicha Lipschitz shartini (yoki differensiallanuvchanlik) qanoatlantirsa:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (\text{Lipschitz sharti})$$

unda Koshi masalasi uchun **yagona va mavjud yechim** mavjud bo'ladi. Bu yechim  $y=y(x)$  funksiya ko'rinishida bo'ladi va  $x_0$  atrofida aniqlangan bo'ladi.

Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalardagi holat

Agar tenglama  $y'$  ga nisbatan yechilmagan bo'lsa, ya'ni:

$$F(x, y, y') = 0$$

shaklda qolsa va to'g'ridan-to'g'ri  $y'$  ni ifodalab bo'lmasa, yechim mavjudligi uchun quyidagi shartlar talab qilinadi:

1.  $F(x,y,p)$  funksiyasi uzluksiz bo'lishi;
2.  $F(x,y,p)$  funksiyasi  $p$  (ya'ni  $y'$ ) bo'yicha differensiallanuvchi bo'lishi;
3. Quyidagicha shart bajarilishi:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_{(x_0, y_0, p_0)} \neq 0$$

3. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalarning yechimlarini topish bosqichlari (algoritmi)

Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglama quyidagicha umumiy ko'rinishda beriladi:

$$F(x, y, y') = 0,$$

bu yerda  $F$  — uchta o'zgaruvchiga bog'liq uzluksiz funksiya,  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Agar tenglama  $y'$  ga nisbatan yechilmagan bo'lsa, uni yechish uchun quyidagi **bosqichma-bosqich algoritm** qo'llaniladi:

$$F(x, y, y') = 0$$

Tenglama qanday turga kirishini aniqlang:

- Chiziqli emasmi?
- Implicitmi?
- Parametrlri ko'rinishga o'tish mumkinmi?

2-bosqich. Hosilaga ( $y'$ ) nisbatan yechish imkoniyatini tekshirish

- Agar mumkin bo'lsa, tenglamani quyidagicha yechib oling:

$$y' = f(x, y)$$

- Bu holda oddiy birinchi tartibli differensial tenglama (chiziqli, ajratiluvchi, Bernulli) hosil bo'ladi.

3-bosqich. Koshi teoremasi shartlarini tekshirish

- Funksiya  $f(x,y)$  quyidagi shartlarni qanoatlantiradimi?

- Uzluksizlik
- Lipschitz sharti ( $y$  bo'yicha)
- Agar  $h$ ,  $u$  holda boshlang'ich shart bilan yagona yechim mavjud bo'ladi.

4-bosqich. Yechimni integrallash

Agar  $y'$  ni aniq ifodalab bo'lsa:

- Ajratiluvchi tenglama bo'lsa:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

- Chiziqli tenglama bo'lsa:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Integratsiya faktori yordamida yechiladi

To'liq differensial tenglama bo'lsa:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

5-bosqich. Agar  $y'$  ni yechib bo'lmasa (ya'ni implicit bo'lsa):

- Tenglama quyidagicha qoladi:

$$F(x, y, y') = 0$$

Bu holda:

- Parametrlil yechimlar topiladi:

$$x = \phi(t), y = \psi(t)$$

- Implicit funksiya nazariyasiga murojaat qilinadi:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0 \Rightarrow y' = f(x, y)$$

lokal yechim sifatida mavjud

6-bosqich. Yechimni tekshirish va boshlang'ich shartni qo'llash

- Topilgan umumiy yechimga boshlang'ich shartni  $(y(x_0) = y_0)$  qo'yib, aniq yechim aniqlanadi.
- Agar yechim  $H(x,y)=C$  ko'rinishida bo'lsa — bu yashirin yechim hisoblanadi.

#### 4.Integrallash usullari

a)Yechib olinadigan tenglamalar

Ta'rif: Agar differensial tenglama:

$$F(x, y, y') = 0$$

ko'rinishda bo'lib, uni **hosila**  $y'$  ga nisbatan yechib, quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin bo'lsa:

$$y' = f(x, y),$$

ya'ni hosilaga nisbatan yechilsa, u holda bunday tenglamalar yechib olinadigan tenglamalar deyiladi.

Bu holda tenglama oddiy birinchi tartibli tenglama sifatida qaraladi va klassik integrallash usullari yordamida yechiladi.

Yechib olinadigan tenglamalarni integrallash usullari

1. Ajratiluvchi o'zgaruvchili tenglama

Agar tenglama:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

ko'rinishida bo'lsa, o'zgaruvchilarni ajratib yozamiz:

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

va ikkala tomon integrallanadi:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

## 2. Chiziqli birinchi tartibli tenglama

Ko‘rinishi:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Bu tenglama **integratsiya faktori** yordamida yechiladi. Integratsiya faktori:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

Tenglama quyidagi ko‘rinishga o‘tadi:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x) \Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x) dx + C$$

## 3. To‘liq differensial tenglama

Agar tenglama:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ko‘rinishida berilgan bo‘lib, quyidagicha shart bajarilsa:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

unda u to‘liq differensial tenglama bo‘ladi va potensial funksiyani (ya'ni  $F(x,y)$ ) topish orqali integrallanadi.

## 4. Bernulli tenglamasi

Ko‘rinishi:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

Buni quyidagicha o'zgartirish kiritamiz:

$$z = y^{1-n}$$

Natijada chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Misol:

Berilgan tenglama:

$$\frac{dy}{dx} = xe^y$$

Bu ajratiluvchi o'zgaruvchili tenglama:

$$e^{-y} dy = x dx$$

Integrallaymiz:

$$\int e^{-y} dy = \int x dx \Rightarrow -e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C$$

Bu umumiy yechim — **yechib olinadigan tenglama** orqali topildi.

b) Parametrli yechim usuli

Ta'rif: Agar differensial tenglama quyidagi shaklga keltirib bo'lmasa:

$$y' = f(x, y),$$

ya'ni **hosilaga nisbatan yechilmagan** bo'lib, aniq  $y=y(x)$  shakldagi yechim topish qiyin bo'lsa, ba'zi hollarda **parametr yordamida**  $x$  va  $y$  ni ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

bu yerda  $t$  — parametr (odatda vaqt, burchak yoki boshqa fizik miqdor),  $\varphi(t)$  va  $\psi(t)$  uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar.

Bu usul **parametrli yechim** (или параметрическое решение) deb ataladi.

Asosiy tushunchalar: Berilgan tenglama:

$$F(x, y, y') = 0$$

boʻlib,  $x$  va  $y$  ni parametr orqali ifodalash mumkin boʻlsa:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

Shunda:

$$F(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}) = 0$$

hosil boʻladi. Agar bu identiklik bajarilsa, demak bu **parametrli yechim** toʻgʻri.

Parametrli yechimdan foydalanish hollari:

- Tenglama  $y'$  ga nisbatan yechilmaydi;
- Yechim chiziq, aylana, spiralsimon egri chiziq kabi ifodalanadi;
- Fizik modellar (masalan, harakat trayektoriyasi) parametrik boʻladi;
- Implicit (yashirin) yechim aniqlash oʻrniga ttt orqali ifodalash osonroq.

Misol 1: Berilgan parametrli funksiya:

$$x = t^2 + 1, \quad y = t^3 - t$$

Hisoblaymiz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 1}{2t}$$

Demak, bu yechim  $y(x)$  ni aniq ifodalab boʻlmagan hollarda parametr orqali ifodalangan.

Misol 2:

Tenglama:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Bu tenglama  $y=y(x)$  ko‘rinishida yechish ikki qismli bo‘ladi, ammo parametrli ifoda ancha qulay:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \tan t$$

Parametrli yechim aylana trayektoriyasi bo‘yicha to‘liq harakatni ifodalaydi.

d) Yashirin yechimlar (Implicit solutions)

Ta’rif: Yashirin yechim (ruscha: *неявное решение*, inglizcha: *implicit solution*) — bu differensial tenglamaning yechimi quyidagicha aniq ( $y = y(x)$ ) ko‘rinishda emas, balki ikki o‘zgaruvchili funktsiyaning tenglamasi ko‘rinishida ifodalangan bo‘ladi:

$$H(x, y) = C,$$

bu yerda:

- $H(x, y)$  — ikki o‘zgaruvchili uzluksiz differensiallanuvchi funktsiya,
- $C$  — ixtiyoriy (doimiy) parametr.

Bu yechimni aniq  $y(x)$  shakliga keltirib bo‘lmasligi yoki bu kerak bo‘lmasligi mumkin.

Qachon yashirin yechim paydo bo‘ladi?

- Ajratiluvchi o‘zgaruvchili tenglamalarni integrallaganimizda:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

- ko‘pincha  $F(x, y) = C$  ko‘rinishidagi yechim chiqadi;
- To‘liq differensial tenglamalarda:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \Rightarrow F(x, y) = C$$

- $y'$  ga nisbatan yechib bo'lmaydigan tenglamalarda ham implicit (yashirin) ko'rinishda qoldiriladi.

1-misol (Ajratiluvchi tenglama):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$y dy = x dx$$

Integrallaymiz:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1$$

Bu yechim  $y = y(x)$  emas, balki  $x^2 - y^2 = C_1$  — **yashirin yechim.**

2-misol (To'liq differensial):

Berilgan tenglama:

$$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$$

To'liqligini tekshiramiz:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Shunday ekan, bu **to'liq differensial tenglama.**

Potensial funksiya:

$$F(x, y) = x^2y + xy^2 \Rightarrow F(x, y) = C$$

Bu ham yashirin yechim hisoblanadi.

Geometrik ma'no:

- $H(x,y)=C$  — bu chiziq (egri) yuzasi bo'yicha yotgan barcha nuqtalar yechimlar to'plamidir.
- Har bir  $C$  qiymat — integral chiziq (yechim egri chizig'i)ga mos keladi.

## 5.Fizikaga oid misollar

1-misol: Tormozlanayotgan jismlar harakati

(Nyutonning II qonuni asosida)

Jism qarshilik kuchi ta'sirida harakat qilmoqda:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

Bu tenglama  $v(t)$  funksiyasiga nisbatan **hosilaga nisbatan yechilgan** bo'lsa-da, ko'pincha umumiy model ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$F(v, \frac{dv}{dt}) = 0$$

Agar tenglama quyidagicha berilsa:

$$\frac{dv}{dt} + \alpha\sqrt{v} = 0$$

bu holatda **ajratiluvchi tenglama** bo'lib, yechiladi:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\alpha \int dt$$

2-misol: Elektr zanjir (RC-kontur)

Quyidagi tenglama RC zanjir uchun tok kuchining o'zgarishini ifodalaydi:

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt = V_0$$

Bu integral tenglamani differensial shaklga o'tkazamiz:

$$R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_0$$

Agar

$$q = q(t), i = dq/dt,$$

bo'lsa, u holda:

$$F(q, \frac{dq}{dt}) = R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q - V_0 = 0$$

Bu — hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglama.

3-misol: Issiqlik o'tkazuvchanlik (Fourier qonuni)

Issiqlik oqimi:

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

Agar tashqi sharoitga bog'liq bo'lsa (masalan,  $q=ax+b$ ), quyidagicha tenglama paydo bo'ladi:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{k}(ax + b)$$

Bu tenglama chiziqli ko'rinishga keltiriladi, ammo boshlang'ichda hosilaga nisbatan yechilmagan ko'rinishda tahlil qilinadi.

4-misol: RLC zanjirdagi tebranishlar

Elektr tebranishlar tenglamasi:

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

Bu ikkinchi tartibli tenglama bo'lsa-da, uni o'zgaruvchi kiritish orqali:

$$p = \frac{dq}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt} + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}q = 0$$

tenglama birinchi tartibli, hosilaga nisbatan yechilmagan sistemaga keltiriladi.

Misol 5: Harakat trayektoriyasi (parametrlri yechim bilan)

Zarraning trayektoriyasi quyidagicha parametrli ifodalangan:

$$x(t) = v_0 t \cos \theta, \quad y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Bu yerda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

orqali trayektoriya tenglamasi hosil qilinadi:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta - \frac{gt}{v_0 \cos \theta}$$

Yechim aniqlanmaydi, lekin parametrli ko‘rinishda ifodalanadi — bu **parametrli yechim usuliga** oid misol.

Mustaqil topshiriqlar

1. Quyidagi fizik model differensial tenglamasini tahlil qiling va integrallang:  
Harakat:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

2. Quyidagi differensial tenglama yashirin shaklda yechimga ega. Uni yeching:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

3. Quyidagi tenglama hosilaga nisbatan yechilmagan ko‘rinishda berilgan.  
Parametrli yechim toping:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan(y - x)$$

4. Quyidagi differensial tenglamani Koshi masalasi sifatida yeching:

$$\frac{dy}{dx} = xy^2, \quad y(0) = 1$$

5. Quyidagi tenglamani hosilaga nisbatan yechish mumkinmi? Agar bo‘lsa, yeching:

$$xy' + y = \sin(x)$$

6. Parametrli ko‘rinishda berilgan egri chiziqni analiz qiling va  $\frac{dy}{dx}$  ni toping:

$$x = t^2 - 1, \quad y = t^3 + t$$

7. Quyidagi to‘liq differensial tenglama berilgan. To‘liqligini tekshiring va yechimini toping:

$$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$$

8. Aylana trayektoriyasini parametrlil usul bilan ifodalang va  $\frac{dy}{dx}$  ni hisoblang:  
 $x^2 + y^2 = 4$

### Savollari

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglama deganda nima tushunasiz? Misol keltiring.
2. Koshi masalasi qanday masala va u qachon yagona yechimga ega bo'ladi?
3. Quyidagi tenglamani qanday ko'rinishga keltirish mumkin?

$$y - xy' + \sqrt{1 + (y')^2} = 0$$

4. Parametrlil yechim deganda nima tushuniladi? Misol keltiring.
5. Qachon differensial tenglamaning yechimi yashirin (implicit) shaklda ifodalanadi?
6. Integrallashning qanday usullari mavjud? Har biriga misol keltiring.
7. Quyidagi tenglama qanday turga kiradi va qanday usul bilan yechiladi?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$