13-mavzu: O‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sistemasi

Reja:

1. O‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasi tushunchasi
2. Matritsa ko‘rinishi va umumiy formulasi
3. Bir jinsli sistemaning yechimi (eigenvalue-eigenvector usuli)
4. Bir jinsli bo‘lmagan sistemaning yechimi (umumiy + xususiy)
5. Amaliy misol
6. Fizik talqin
7. Nazorat savollari

1. O‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasi tushunchasi

Bu — bir necha birinchi tartibli differensial tenglamalardan iborat bo‘lgan tizim bo‘lib, har bir tenglamada bir nechta noma’lum funksiya va ularning hosilalari ishtirok etadi.

Tizim umumiy ko‘rinishda:

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases}$$

bu yerda:

$x(t), y(t)$ — noma’lum funksiyalar (odatda vaqtga bog‘liq),

a_{ij} — **o‘zgarmas (doimiy) koeffitsientlar,**

$f_1(t), f_2(t)$ — berilgan funksiya (agar $f_1(t), f_2(t) \neq 0,$ sistema **bir jinsli bo‘lmagan** bo‘ladi)

2. Matritsa ko‘rinishi va umumiy formulasi

Yuqoridagi sistema qulay shakldа matritsa ko‘rinishida yoziladi:

$$\mathbf{X}'(t) = A \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t)$$

bu yerda:

$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ — noma'lum funksiyalar vektori,

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ — koeffitsientlar matritsasi,

$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$ — berilgan funksiya (tashqi ta'sir)

Bu shakl **kompakt, analiz qilishga oson** va algebraik metodlar bilan ishlashga qulay bo‘ladi.

3. Bir jinsli sistemaning yechimi (eigenvalue-eigenvector usuli)

Agar $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$ ya’ni sistema **bir jinsli** bo‘lsa:

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X}$$

Bunday sistema quyidagicha yechiladi:

1. Matritsa A uchun xarakteristik tenglama tuziladi:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

2. O‘z qiymatlar λ_1, λ_2 topiladi
3. Har bir o‘z qiymatga mos **o‘z vektor** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ □ aniqlanadi.
4. Umumiy yechim:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Bu usul fizikada **ozod tebranishlar, energiya almashinuvi** kabi hodisalarni ifodalashda qo‘llaniladi.

4. Bir jinsli bo‘lmagan sistemaning yechimi

Agar $\mathbf{F}(t) \neq 0$ bo‘lsa — sistema tashqi kuch ta’sirida ishlaydi.

Tenglama:

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

Yechim ikki qismdan iborat:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_{\text{umumiy}}(t) + \mathbf{X}_{\text{xus}}(t)$$

5.Amaliy misol

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

1-bosqich: Matritsa shakli:

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

2-bosqich: Xarakteristik tenglama:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Ildizlar:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$$

3-bosqich: O'z vektorlarni topish

1) $\lambda_1 = 1$

$$(A - I)\mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$$

Tanlaymiz:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = 3v_1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4-bosqich: Umumiy yechim (bir jinsli qism)

$$\mathbf{X}_{\text{umumiy}}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t}$$

5.Xususiy yechim (tajriba usuli)

Berilgan qo‘zg‘atuvchi:

$$\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{Tajriba:}\quad \mathbf{X}_{\text{xus}}(t)=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}e^t$$

Hosila olamiz

$$\mathbf{X}'_{\text{xus}}(t)=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}e^t$$

Tenglama o‘rniga qo‘yamiz

$$\mathbf{X}'_{\text{xus}}=A\mathbf{X}_{\text{xus}}+\mathbf{F}(t)\Rightarrow \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}e^t=\left(\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)e^t$$

Koeffitsientlarni taqqoslaymiz:

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+b+1\\3a+4b\end{bmatrix}$$

Tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases}a=2a+b+1\\b=3a+4b\end{cases}$$

1-tenglamadan:

$$a-2a-b=1\Rightarrow -a-b=1\quad (1)$$

2-tenglamadan:

$$b-4b=3a\Rightarrow -3b=3a\Rightarrow a=-b\quad (2)$$

(1) ga (2) ni qo‘yamiz:

$$-(-b)-b=1\Rightarrow b-b=1\Rightarrow 0=1$$

Natijada xato bo‘lib chiqdi, bu xatolik shuni anglatadiki**: tajriba yechim** sistemaning umumiy yechimi bilan **rezonans holatida to‘g‘ri keladi**, ya’ni e^t bir jinsli qismda ham bor.

Shuning uchun tajriba funksiyasini o‘zgartiramiz:

$$\mathbf{X}_{\text{xus}}(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} te^t$$

Hisoblab qo‘yamiz:

$$\mathbf{X}'_{\text{xus}} = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} t \right) e^t$$

Yangi tenglama:

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} t \right) e^t = \left(A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t$$

Uzoq bo‘lganligi sababli yechim:

$$\mathbf{X}_{\text{xus}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} te^t$$

6-bosqich: Yakuniy yechim

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} te^t$$

6.Fizik talqin: O‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sistemasi

Berilgan sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Mazmuni:

Bu tenglamalar fizikada ikki o‘zgaruvchi orasidagi o‘zaro bog‘liqlikni ifodalaydi. Har bir o‘zgaruvchi vaqtga bog‘liq, lekin ular o‘zaro ham bir-biriga ta’sir qiladi. Bunday sistemalar quyidagi holatlarda uchraydi:

1. Elektr zanjir (RLC kontur) modeli

- x(t) — zaryad miqdori yoki tok,
- y(t) — unga bog‘langan kuchlanish yoki boshqa tok
- e^t — zanjirga ulangan tashqi kuch (masalan, kuchlanish manbai yoki tashqi elektromotor kuch)

Bu sistemadagi:

- Doimiy koeffitsientlar (2, 3, 4) — elementlarning xossalari: qarshilik, induktivlik, sig‘im.
- Bir jinsli bo‘lmagan a’zo e^t — bu tashqi kuch ta’siri, ya’ni energiya berilishi yoki tashqi tebranish manbai.

2. Tebranuvchi sistemalar (ikki massasimon obyekt)

- x(t), y(t) — ikkita massaning holatlari (masalan, siljishlar),
- Ular prujinalar orqali bog‘langan, birining harakati ikkinchisiga ta’sir qiladi,
- Tashqi kuch (masalan, tashqi urinish yoki tebratuvchi kuch) — e^t ko‘rinishida berilgan.

Bu mexanik modelda sistemaning o‘z-o‘zini tebratish qobiliyati va tashqi kuchga javobi ko‘rib chiqiladi.

3. Biologik yoki kimyoviy modellar

- x(t), y(t) — ikki populyatsiya yoki reaksiya moddalari konsentratsiyasi,
- O‘zaro ta’sirlar (o‘sish, parchalanish, almashinish) — sistemadagi koeffitsientlar orqali ifodalanadi,
- e^t — tashqi omil: harorat, bosim, muhit o‘zgarishi.

Savollar:

1. O‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasi nima?
2. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sistemasi o‘rtasidagi farq nimada?
3. Bunday sistemani matritsa shaklida yozishning afzalliklari nimalarda?
4. O‘z qiymatlar (eigenvalues) va o‘z vektorlar (eigenvectors) qanday topiladi? Ular nima uchun kerak?
5. Bir jinsli bo‘lmagan sistema uchun umumiy yechim qanday tuziladi?
6. Xususiy yechimni tajriba (ansatz) usuli bilan qanday tanlanadi?
7. Rezonans holatida qanday holat yuzaga keladi? Tajriba yechim qanday o‘zgartiriladi?
8. Bunday tizimlar fizikada qaysi jarayonlarni ifodalaydi?
9. Eksponensial yechimlarning fizik ma’nosi qanday?