

11-amaliy mashg'uloti

O'zgarimas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar

Faraz qilaylik, berilgan $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ funksiyalar I oraliqda $n-1$ marta differensiallanuvchi bo'lsin. Ularning vronskiani (Vronskiy determinanti) deb ushbu

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinantga aytiladi.

Teorema 1. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar I oraliqda $n-1$ marta differensiallanuvchi va chiziqli bog'langan bo'lsa, ularning vronskiani shu I oraliqda aynan nolga teng.

Teoremaning shartiga ko'ra hammasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| \neq 0$) sonlar uchun I oraliqda ushbu

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0, x \in I,$$

ayniyat o'rinli. Bu ayniyatni ketma-ket $n-1$ marta differensiallab, quyidagi ayniyatlar sistemasini hosil qilamiz:

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0$$

$$\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \dots + \lambda_n y_n'(x) = 0$$

.....

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

yoki vektor ko'rinishda

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} y_n(x) \\ y_n'(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oxirgi vektor tenglik berilgan funksiyalar Vronskiy determinantining ustunlari orasida ixtiyoriy $x \in I$ nuqtada chiziqli bog'lanish mavjudligini anglatadi

$(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| \neq 0)$. Demak, algebradan ma'lum teorema ko'ra berilgan funksiyalarning vronskiani har bir $x \in I$ nuqtada nolga teng.

Natija. Agar I oraliqda $n-1$ marta differensiallanuvchi $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarning $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ vronskiani I ning biror nuqtasida noldan farqli bo'lsa, u holda bu funksiyalar I oraliqda chiziqli erkli bo'ladi.

Bu yerda shuni e'tirof etaylikki, teorema 1 va uning natijasining teskarisi o'rinli emas, ya'ni I oraliqda $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$ ekanligidan y_1, y_2, \dots, y_n funksiyalarning I oraliqda chiziqli bog'langanligi kelib chiqmaydi. Bu tasdiqni quyidagi misol asoslaydi.

Misol. Ushbu

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad \text{va} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ x^2, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyalarni qaraylik. Ravshanki, ular $C^1([-1,1])$ sinfga tegishli. Osongina tekshirib ko'rish mumkinki, $[-1,1]$ oraliqda $W(x) = W[y_1, y_2] = 0$. Lekin biz bu funksiyalarning $[-1,1]$ oraliqda chiziqli erkli ekanligini yuqorida ko'rsatgan edik.

Agar qaralayotgan funksiyalar biror chiziqli (uzluksiz koeffitsientli) bir jinsli differensial tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda bu funksiyalar vronskianining nolga tengligidan ularning chiziqli bog'langan ekanligi kelib chiqadi. Bu tasdiq quyidagi teoremaning bir qismidir.

Teorema 2. Aytaylik, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar n -tartibli chiziqli (I oraliqda uzluksiz koeffitsientli) bir jinsli differensial tenglama $L[y] = 0$ ning (I da) yechimlari bo'lsin. U holda bu $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarning (I da) chiziqli bog'langan bo'lishi uchun $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ vronskianning biror nuqtada nolga teng bo'lishi yetarli va zarurdir.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarning vronskiani $x_0 \in I$ nuqtada nolga teng bo'lsin, $W(x_0) = 0$. Demak, algebradan ma'lum teorema ko'ra $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ noma'lumlarga nisbatan

$$\lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) + \dots + \lambda_n y_n(x_0) = 0$$

$$\lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) + \dots + \lambda_n y_n'(x_0) = 0$$

.....

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

chiziqli bir jinsli algebraik sistema $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| \neq 0$) notrivial yechimga ega. Endi ana shu notrivial yechimlarning birortasi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ni olib, bu sonlarga ko'ra $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x)$ funksiyani tuzaylik. Bu funksiya yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida $L[y] = 0$ tenglamaning yechimi va $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ larning tanlab olinishiga ko'ra $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Yechimning yagonalik xossasiga ko'ra $y(x) \equiv 0$, ya'ni tanlangan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| \neq 0$) lar uchun I oraliqda $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0$. Bu $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarning chiziqli bog'langan ekanligini anglatadi.

Zarurligi. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlar chiziqli bog'langan bo'lsin. Bu holda ularning vronskiani teorema 1ga ko'ra barcha nuqtalarda nolga teng.

Isbotlangan bu teoremadan quyidagi bevosita kelib chiqadi.

Teorema 3. Aytaylik, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar n -tartibli chiziqli bir jinsli $L[y] = 0$ differensial tenglamaning I oraliqda aniqlangan yechimlari bo'lsin. U holda $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarning vronskiani yo I oraliqda nolga aylanmaydi va bu yechimlar chiziqli erkli, yoki yechimlarning vronskiani I oraliqda aynan nolga teng va bu yechimlar chiziqli bog'langan bo'ladi.

Faraz qilaylik, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarning $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ vronskiani I oraliqda nolga aylanmasin. U holda bu yechimlar chiziqli erkli bo'ladi, chunki agar ular chiziqli bog'langan bo'lganda edi, teorema 2 ga ko'ra $W(x)$ vronskian farazimizga zid ravishda aynan nolga teng bo'lardi.

Endi teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarning $W(x)$ vronskiani I oraliqning biror nuqtasida nolga aylangan bo'lsin. U holda yana teorema 2 ga ko'ra bu yechimlar chiziqli bog'langan va, demak, $W(x)$ vronskian I oraliqda aynan nolga teng.

1-misolni qaraylik. Quyidagi funksiyalar berilgan sohada chiziqli bog‘liqlik jihatidan tekshiriladi. Funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida qaraladi.

$$6x + 9, \quad 8x + 12.$$

Masala yechimi quyidagicha:

$$y_1 = 6x + 9, \quad y_2 = 8x + 12$$

Funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi ta’rifidan foydalangan holda quyidagicha yozamiz:

$$\alpha_1(6x + 9) + \alpha_2(8x + 12) \equiv 0, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

Bundan quyidagi tenglamani olamiz:

$$6\alpha_1x + 8\alpha_2x + 9\alpha_1 + 12\alpha_2 = 0$$

Bu esa quyidagi tenglamalar tizimini beradi:

$$6\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0, \quad 9\alpha_1 + 12\alpha_2 = 0$$

Aslida bu ikkita noma’lumli bitta tenglama. Shuning uchun, masalan, $\alpha_1 = -1$ deb olsak, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$ bo‘ladi.

Demak, ta’rifga ko‘ra, bu funksiyalar sistemasi **chiziqli bog‘liq** bo‘ladi.

2-misolni qaraylik: Quyidagi funksiyalar berilgan sohada chiziqli bog‘liqlik jihatidan tekshiriladi. Funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida qaraladi:

$$\sin x, \quad \cos x.$$

misolni yechimi quyidagicha: Determinant usulida tekshirilgan (Vronskiy determinanti):

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bu determinanti nolga teng emas, shuning uchun funksiyalar chiziqli bog‘liq emas.

3-misolni qaraylik: Quyidagi funksiyalar berilgan sohada chiziqli bog‘liqlik jihatidan tekshiriladi. Funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida qaraladi:

$$1, \quad x, \quad x^2$$

Misolni yechimi quyidagicha: Vronskiy determinantini hisoblaymiz:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vronskiy nolga teng emas, demak **funksiyalar chiziqli bog‘liq emas**.

4-misolni qaraylik: Quyidagi funksiyalar berilgan:

$$y_1 = 4 - x, \quad y_2 = 2x + 3, \quad y_3 = 6x + 8$$

Ushbu funksiyalar o‘zaro chiziqli bog‘liqmi yoki yo‘qligini aniqlaymiz.

1-qadam: Chiziqli bog‘liqlik ta’rifi. Funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ularning chiziqli kombinatsiyasi nolga teng bo‘lishi kerak:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x) \equiv 0 \quad (\text{har qanday } x \text{ uchun})$$

Bu shartni tekshirish uchun determinant (Vronskiy) usulidan foydalanamiz.

2-qadam: Vronskiy determinantini tuzamiz

Vronskiy quyidagicha bo‘ladi (har bir funksiyaning 1- va 2-tartibli hosilalarini yozamiz):

$$W = \begin{vmatrix} 4 - x & 2x + 3 & 6x + 8 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Bu determinantni hisoblaymiz:

- Ikkinchi qatordan ko'rinib turibdiki, har bir funksiyaning ikkinchi hosilasi 0 (ya'ni ular chiziqli funksiyalardir).
- Uchinchi qator to'liq nol bo'lsa, determinantning qiymati doimo nol bo'ladi:

$$W = 0$$

3-qadam: Xulosa

Vronskiy determinanti 0 ga teng bo'lsa va funksiyalar kamida bittasi boshqalar yordamida ifodalanadigan bo'lsa, u holda ular **chiziqli bog'liq** bo'ladi.

Masalan:

$$y_3 = 3y_2 - 1$$

Shuning uchun, berilgan funksiyalar **chiziqli bog'liq**.

Demak **Funksiyalar: 4 - x, 2x + 3, 6x + 8 chiziqli bog'liq**.

5-misolni qaraylik: Quyidagi funksiyalar berilgan:

$$y_1 = x^2 + 2, \quad y_2 = 3x^2 - 1, \quad y_3 = x + 4$$

Ushbu funksiyalar o'zaro chiziqli bog'liqmi yoki yo'qligini aniqlaymiz.

1-qadam: Chiziqli bog'liqlikni tekshirish uchun Vronskiy determinanti

Wronskiy determinantini tuzamiz (1- va 2-tartibli hosilalar):

$$W = \begin{vmatrix} x^2 + 2 & 3x^2 - 1 & x + 4 \\ 2x & 6x & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinantni quyidagicha hisoblaymiz (birinchi satrga nisbatan):

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 2) \cdot (6 \cdot 0 - 1 \cdot 6) - (3x^2 - 1) \cdot (2x \cdot 0 - 1 \cdot 2) + (x + 4) \cdot (2x \cdot 6 - 6x) \\
&= (x^2 + 2)(-6) - (3x^2 - 1)(-2) + (x + 4)(6x) \\
&= -6x^2 - 12 + 6x^2 - 2 + 6x^2 + 24x \\
&= (-6x^2 + 6x^2 + 6x^2) + 24x - 14 \\
&= 6x^2 + 24x - 14 \neq 0
\end{aligned}$$

Bu ifoda 0 ga teng emas, demak Wronskiy determinant **nolga teng emas**.

Wronskiy determinant nolga teng bo'lmagani uchun, bu funksiyalar **chiziqli bog'liq emas**.

6-misolni qaraylik: Quyidagi funksiyalar berilgan:

$$y_1 = x^2 - x + 3, \quad y_2 = 2x^2 + x, \quad y_3 = 2x - 4$$

Ushbu funksiyalar o'zaro chiziqli bog'liqmi yoki yo'qligini aniqlaymiz.

Yechimi quyidagicha: Chiziqli bog'liqlik ta'rifiga ko'ra, funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning chiziqli kombinatsiyasi identik nolga teng bo'lishi kerak:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x) \equiv 0 \quad \text{barcha } x \in \mathbb{R}$$

Funksiyalarni o'rniga qo'yamiz:

$$\alpha_1(x^2 - x + 3) + \alpha_2(2x^2 + x) + \alpha_3(2x - 4) = 0$$

Bu tenglik quyidagi koeffitsiyentlar tizimini beradi:

1. $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$
2. $-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$

$$3. 3\alpha_1 - 4\alpha_3 = 0$$

3 ta tenglama mavjud.

Quyidagi qiymatlarni olamiz:

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 3$$

Bu qiymatlar barcha tenglamalarni qanoatlantiradi.

Demak, berilgan funksiyalar chiziqli bog'liq.

7-misolni qaraylik: Quyidagi funksiyalar berilgan:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{3x}$$

Ushbu funksiyalar o'zaro chiziqli bog'liqmi yoki yo'qligini aniqlaymiz.

Yechimi quyidagicha: Vronskiy determinantidan foydalanamiz:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

Ushbu determinantni hisoblaymiz:

1. Birinchi ustun bo'yicha quyidagicha ochamiz:

$$W = e^x \cdot (2e^{2x} \cdot 9e^{3x} - 3e^{3x} \cdot 4e^{2x}) = e^x(18e^{5x} - 12e^{5x}) = 6e^{6x}$$

$$W = 6e^{6x} \neq 0$$

Wronskiy nolga teng emas, shuning uchun bu funksiyalar chiziqli bog'liq emas.

n-tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglama

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1)$$

ko'rinishga ega. Bu yerda barcha a_1, a_2, \dots, a_n koeffitsiyentlar haqiqiy o'zgarmas sonlardir. Bu holda xususiy yechimlarning fundamental

sistemasini, binobarin, umumiy yechimni izlash sof algebraik amallarni bajarishga — n-darajali bitta algebraik tenglamani, ya'ni ushbu

$$r^n + ar^{n-1} + \dots + a_{n-r}r + a_n = 0 \quad (2)$$

xarakteristik tenglamani yechishga keltiriladi.

(2) tenglamaning har bir $m \geq 0$ karrali haqiqiy ildiziga umumiy yechimdagi

$$(C_1 + C_2x + \dots + C_mx^{m-1})e^{\alpha x}$$

qo'shiluvchi mos keladi.

(2) tenglamaning har bir $m \geq 0$ karrali $\alpha \pm \beta i$ qo'shma kompleks ildizlar juftiga umumiy yechimda

$$e^{\alpha x} [(A_1 + A_2x + \dots + A_mx^{m-1}) \cos \beta x + (B_1 + B_2x + \dots + B_mx^{m-1}) \sin \beta x]$$

qo'shiluvchi mos keladi.

Bir jinslilmas:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x) \quad (3)$$

Tenglamaning y umumiy yechimini topish uchun, uning birorta xususiy yechimini bilish yetarlidir, bunda unga mos bir jinsli (1) tenglamaning umumiy yechimi yuqorida keltirilgan 1) va 2) qoidalarga ko'ra topiladi.

Agar (3) ning o'ng tomonida ko'rsatkichli funksiyalar, sinuslar, kosinuslar va ko'phadlar yoki ularning butun ratsional kombinatsiyalari turgan bo'lsa, u holda uning xususiy yechimini topishda aniqmas koeffitsiyentlar usulini tatbiq qilish mumkin. Bu usul xususiy yechimning shaklini bilishga asoslangan. Tabiiyki, xususiy yechimning o'ng tomonning shakliga o'xshash shaklda izlash kerak. Biroq xususiy yechimning shakli tenglamaning chap tomoniga ham bog'liq bo'ladi.

a va b lar o'zgarmas sonlar, $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ mos ravishda darajalari n va m bo'lgan ko'phadlar bo'lsin. (3) ning o'ng tomoni

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx) \quad (4)$$

ko'rinishda bo'lsa, quyidagi hollar vujudga keladi:

1-hol. $\alpha \pm ib$ (2) ning ildizi bo'lganda xususiy yechim

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} \left(\tilde{P}_1(x) \sin bx + \tilde{Q}_1(x) \cos bx \right) \quad (5)$$

ko'rinishga ega, bu yerda $\tilde{P}_1, \tilde{Q}_1 - l = \max(n, m)$ darajali ko'phadlar.

2-hol. $\alpha \pm ib$ (2) ning s karrali ildizi bo'lganida xususiy yechim

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} \cdot x^s \left(\tilde{P}_1(x) \sin bx + \tilde{Q}_1(x) \cos bx \right) \quad (6)$$

ko'rinishga ega.

Har ikki holda ham \tilde{P}_1, \tilde{Q}_1 ko'phadlarning koeffitsiyentlari aniqlanmas koeffitsiyentlar usuli yordamida topiladi.

Misol. Quyidagi bir jinsli tenglamalarning umumiy yechimini toping:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$

b) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

c) $y'' - 10y' + 25y = 0$

d) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Yechish:

a) Bu tenglama uchun xarakteristik tenglama:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

ildizlar: $r_1 = 2, r_2 = 3$.

Shuning uchun umumiy yechim ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

b) Berilgan tenglama uchun xarakteristik tenglama:

$$r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = 0$$

Chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratib:

$$(r + 1)(r + 2)(r + 3) = 0$$

ya'ni, ildizlar: $r_1 = -1, r_2 = -2, r_3 = -3$.

Differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$$

c) $y'' - 10y' + 25y = 0$ tenglamaga mos xarakteristik tenglama:

$$r^2 - 10r + 25 = 0$$

Bu tenglama $r=5$ ikki karrali ildizga ega, shuning uchun umumiy yechim:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{5x}$$

d) $y'' + 2y' + 5y = 0$ tenglamaga mos xarakteristik tenglama:

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

ning ildizlari: $r_{1,2} = -1 \pm 2i$

Umumiy yechim:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

1-masala. g massali zarra A nuqta tomon shu nuqtadan zarracha bo'lgan qadar masofaga proporsional bo'lgan tortish kuchi ta'sirida to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. 1 sm masofada 0,1 Dina kuch ta'sir etadi. Muxit qarshiligi harakat tezligiga proporsional va u tezlik 1 sm/s bo'lganda 0,4 Dinaga teng. $t = 0$ boshlang'ich momentda zarra A nuqtadan 10 sm o'ngroqda joylashgan va tezlik 0 ga teng. Yo'lning vaqtga bog'liqligini toping.

Yechish. Zarraga ikkita kuch ta'sir etadi:

$$F_1' = k_1 x \text{ va } F_2 = k_2 \frac{dx}{dt}$$

bu yerda x — t momentda o‘tilgan yo‘l, $\frac{dx}{dt}$ — tezlik. k_1 va k_2 larni

$$F_1'|_{x=1} = 0,1 \Rightarrow k_1 = 0,1$$

$$F_2|_{v=1} = 0,4 \Rightarrow k_2 = 0,4$$

shartlardan topamiz:

$$k_1 = 0,1, k_2 = 0,4$$

F_3 — tortish kuchi sifatida manfiy bo‘ladi. U holda ushbu harakat tenglamasi:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_1 - F_2$$

$m = 1$ da

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -0,1x - 0,4 \frac{dx}{dt} \quad \text{yoki} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 0,4 \frac{dx}{dt} + 0,1x = 0$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Bu tenglamaga mos xarakteristik tenglama

$$r^2 + 0,4r + 0,1 = 0$$

bo‘lib, uning ildizlari $r_{1,2} = -0,2 \pm 0,245i$ dan iborat. Demak, tenglamaning umumiy yechimi:

$$x = e^{-0,2t} (C_1 \cos 0,245t + C_2 \sin 0,245t)$$

bo‘ladi.

$$x|_{t=0} = 10, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{shartlar}$$

$$\begin{cases} C_1 = 10, \\ -0,2C_1 + 0,245C_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga olib keladi. Bu sistemadan $C_1 = 10, C_2 = 8,16$ larni topamiz.

Demak, izlangan yechim:

$$x = e^{-0,2t}(10 \cos 0,245t + 8,16 \sin 0,245t)$$

Misol. Quyidagi bir jinsli emas tenglamalarning umumiy yechimini toping:

a) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

b) $7y'' - y' = 14x$

c) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$

d) $y'' + 4y' - 2y = 8 \sin 2x$

e) $y'' + y = 4x \cos x$

f) $y'' + 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

Yechish.

a) Dastlab $y'' - 4y' + 4y = x^2$ tenglamaga mos bir jinsli $y'' - 4y' + 4y = 0$

tenglamaning umumiy yechimini topamiz.
Uning xarakteristik tenglamasi:

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

karrali ildizga ega: $r_{1,2} = 2$, shuning uchun umumiy yechim ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x)$$

Agar $a=0$, $b=0$ bo'lsa, (4) da $f(x) = P_n(x)$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda (5) ga ko'ra 0 soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, xususiy yechim

$$\tilde{y} = x^s Q_n(x)$$

ko'rinishda, 0 soni xarakteristik tenglamaning s karrali ildizi bo'lganda esa xususiy yechim

$$\tilde{y} = x^s Q_n(x)$$

ko'rinishda izlash kerak.

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni 2-darajali ko'phad va 0 soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagani sababli, xususiy yechimni

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$$

ko'rinishda izlash lozim. Norma'lum A , B va C koeffitsiyentlarni topish uchun y_1 ni va uning hosilalarini tenglamaga qo'yamiz hamda chap va o'ng tomondagi koeffitsiyentlarni taqqoslaymiz:

$$2A - 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2, \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{3}{8}$$

Demak, xususiy yechim:

$$\tilde{y} = \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$$

Umumiy yechim:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$$

$$b) 7y'' - y' = 14x$$

tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$\bar{y} = C_1 + C_2e^{\frac{x}{7}}$$

chunki xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{1}{7}$$

0 soni xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo'lgani uchun xususiy yechimni

$$\tilde{y} = x(Ax + B)$$

ko'rinishda izlash kerak. Tegishli tenglamalardan A,B larni topamiz:

$$A = -7, \quad B = -98$$

Demak, xususiy yechim:

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{7}} - 7x^2 - 98x$$

c)

$$y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$$

tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini osongina topamiz:

$$\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

Agar $b=0$ bo'lsa, (4) ifoda $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda a soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, xususiy yechimni (5) formulaga ko'ra

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ko'rinishda, a soni xarakteristik tenglamaning s karrali ildizi bo'lganda esa xususiy yechimni (6) formulaga ko'ra

$$\tilde{y} = x^s e^{\alpha x} Q(x)$$

ko'rinishda izlash kerak.

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = 9e^{-3x}$$

ko'rinishda bo'lib,

$$\alpha = -3$$

xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo'lgani uchun xususiy yechimni

$$\tilde{y} = A x e^{-3x}$$

shaklda izlaymiz. Bu yechimni tenglamaga qo'yib,

$$-2Ae^{-3x} = 9e^{-3x}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$A = -\frac{9}{2}$$

Demak, xususiy yechim:

$$\tilde{y} = -\frac{9}{2} x e^{-3x}$$

umumiy yechim:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - \frac{9}{2} x e^{-3x}$$

d) $y'' + 4y' - 2y = 8 \sin 2x$ tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$\bar{y} = C_1 e^{(-2-\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$$

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = e^{\alpha x} P_0(x) \sin 2x$ ko'rinishida bo'lib, $a+bi=2i$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagani uchun xususiy yechimni

$$\tilde{y} = A \cos 2x - B \sin 2x$$

shaklida izlaymiz. Bu ifodani berilgan tenglamaga qo'ysak:

$$(-6A + 8B) \cos 2x - (6B + 8A) \sin 2x = 8 \sin 2x$$

$\cos 2x$ va $\sin 2x$ oldidagi koeffitsientlarni tenglab, A va B larni topamiz:

$$A = -\frac{16}{25}, \quad B = -\frac{12}{25}$$

Demak, xususiy yechim:

$$\tilde{y} = -\frac{16}{25} \cos 2x - \frac{12}{25} \sin 2x$$

Umumiy yechim:

$$y = C_1 e^{(-2-\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} + \frac{16 \cos 2x + 12 \sin 2x}{25}$$

e) $y^* + y = 4x \cos x$ tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$a+bi=i$ xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo'lgani uchun xususiy yechimni

$$\tilde{y} = x((A+B)x \cos x + (C+D)x \sin x)$$

ko'rinishida izlaymiz. A,B,C,D lar uchun mos tenglamalarni yechib,

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = -1$$

larni topamiz. Demak, xususiy yechim:

$$\tilde{y} = x \cos x + x^2 \sin x$$

Umumiy yechim:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + x^2 \sin x$$

f) $y^{(4)} + 2y'' + 5y = e^{-x} \cos 2x$ tenglamaga mos

$y^{(4)} + 2y'' + 5y = 0$ tenglama uchun

$$r^4 + 2r^2 + 5 = 0$$

xarakteristik tenglama $r_{1,2} = \pm 1 \pm 2i$ ildizlarga ega. Shuning uchun, mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$\bar{y} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}, \quad a + bi = -1 + 2i$$

son xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo'lgani uchun xususiy yechimni

$$\tilde{y} = x(A \cos 2x + B \sin 2x)e^{-x}$$

ko'rinishda izlaymiz. Noma'lum A va B koeffitsientlarni topish uchun \tilde{y} ni va uning hosilalarini tenglamaga qo'yib va e^{-x} ga qisqartirib, bu yerdan

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{4}$$

Demak,

$$\tilde{y} = \frac{1}{4}xe^{-x} \sin 2x$$

Shunday qilib, umumiy yechim:

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} \sin 2x$$