12-mavzu: Kirxgof qonunlari asosida RLC elektr zanjiri modellari

(tok va kuchlanishning sistemasi)

Kirxgof qonunlari elektr zanjirlarida tok va kuchlanishlar qanday taqsimlanishini tushunishga imkon beradi. Ular differensial tenglamalar asosida matematik modellar tuzish uchun muhim asos bo‘lib xizmat qiladi.

1-qonun (Tugun qonuni):

Tugun nuqtadagi barcha kiruvchi va chiquvchi toklar yig‘indisi nolga teng:

$$\sum I = 0$$

2-qonun (Kontur qonuni):

Yopiq kontur bo‘ylab kuchlanishlar algebraik yig‘indisi nolga teng:

$$\sum \mathcal{E} - \sum U = 0$$

RLC elementlarning fizik modeli

Elektr zanjir quyidagi asosiy elementlardan tashkil topgan:

Element	Belgilanish	Kuchlanish ifodasi	Tavsif
Rezistor	R	$U_R = IR$	Om qonuni bo‘yicha kuchlanish yo‘qotadi
Induktor	L	$U_L = L\frac{dI}{dt}$	O‘zgarayotgan tok orqali EMK hosil qiladi
Kondensator	C	$U_C = \frac{1}{C}\int I dt$	Zaryad to‘playdi, kuchlanish vaqtga bog‘liq

RLC kontur va differensial tenglama

RLC kontur bu — rezistor, induktor, kondensator va kuchlanish manbai ketma-ket ulangan elektr zanjiridir.

Kirxgofning 2-qonunidan:

$$U_R + U_L + U_C = \mathcal{E}(t)$$

Har bir element kuchlanishini o‘z ifodasi bilan almashtirib yozamiz:

$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt = \mathcal{E}(t)$$

Bu tenglamani zaryad $q(t)$ orqali ifodalash mumkin, chunki $I(t) = \frac{dq}{dt}$:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t)$$

Bu — ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama**,** u RLC tizimdagi zaryadning vaqt bo‘yicha o‘zgarishini ifodalaydi.

Misol 1. Bir jinsli RLC zanjir:

Berilgan

$$R = 2\,\Omega, L = 1\,H, C = 0.25\,F, \mathcal{E}(t) = 0$$

Dastlabki shartlar: $q(0) = 2, I(0) = 0$

Yechim:

1. Tenglama:

$$q'' + 2q' + 4q = 0$$

2. Xarakteristik tenglama:
$$r^2 + 2r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -1 \pm i\sqrt{3}$$
3. Umumiy yechim:
$$q(t) = e^{-t}\left(A\cos(\sqrt{3}t) + B\sin(\sqrt{3}t)\right)$$
4. Dastlabki shartlardan:
$$A = 2, \quad B = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad q(t) = e^{-t}\left(2\cos(\sqrt{3}t) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right)$$
5. Tok:
$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -e^{-t}\left(2\cos(\sqrt{3}t) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right) + e^{-t}\left(-2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + 2\cos(\sqrt{3}t)\right)$$
6. Soddalashtirilgan tok:
$$I(t) = -e^{-t}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\right)\sin(\sqrt{3}t)$$

Misol 2. Bir jinsli bo‘lmagan tenglama (garmonik manba):

Berilgan:

$$R = 1\,\Omega,\, L = 1\,H,\, C = 1\,F,\, \mathcal{E}(t) = 5\cos t$$

Tenglama:

$$q'' + q' + q = 5\cos t$$

Bu ikkinchi tartibli chiziqli nojinsli differensial tenglama bo‘lib, ikki bosqichda yechiladi:

1-bosqich: Bir jinsli tenglama yechimi

$$q'' + q' + q = 0$$

Xarakteristik tenglama:

$$r^2 + r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Kompleks ildizlar bo‘lgani uchun yechim:

$$q_{\text{umumiy}}(t) = e^{-t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

2-bosqich: Xususiy yechim

Nojinsli qo‘zg‘atuvchi: 5cost

Tajriba funksiyasi sifatida quyidagini tanlaymiz:

$$q_{\text{xususiy}}(t) = A\cos t + B\sin t$$

Hosilalarni hisoblaymiz:

$$q' = -A\sin t + B\cos t, \quad q'' = -A\cos t - B\sin t$$

Endi tenglamaga qo‘yamiz:

$$q'' + q' + q = (-A\cos t - B\sin t) + (-A\sin t + B\cos t) + (A\cos t + B\sin t)$$

Tenglamani soddalashtiramiz:

$$(-A\cos t + B\cos t + A\cos t) + (-B\sin t - A\sin t + B\sin t) = B\cos t - A\sin t$$

Demak:

$$B \cos t - A \sin t = 5 \cos t$$

Bu tenglikdan quyidagilar kelib chiqadi:

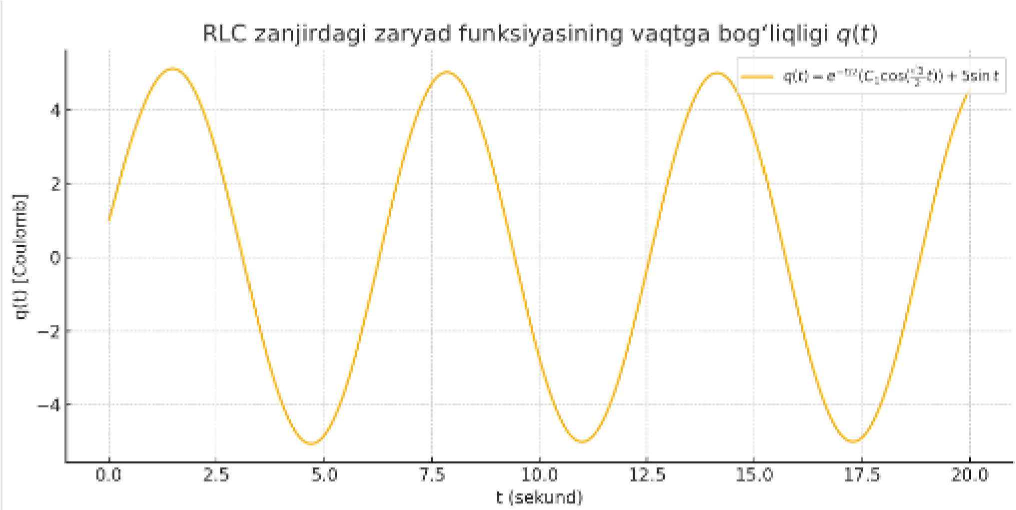
$$B = 5, \quad A = 0$$

Xususiy yechim:

$$q_{\text{xususiy}}(t) = 5 \sin t$$

Yakuniy yechim:

$$q(t) = q_{\text{umumiy}} + q_{\text{xususiy}} = e^{-t/2} \left(C_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + C_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) + 5 \sin t$$



Yuqoridagi grafikda q(t) — zaryadning vaqtga bog‘liqligi tasvirlangan:

$$q(t) = e^{-t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + 5 \sin t$$

Fizik talqini:

1. Ikki qismli yechim:

Birinchi qism $e^{-t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$ — bu so‘nuvchi tebranish, ya’ni zanjir ichki xossalari (R, L, C) tufayli energiyani asta-sekin yo‘qotadi.

Ikkinchi qism 5sint — bu kuchlanish manbasi ta’siri ostidagi majburiy tebranish, u doimiy davom etadi.

2.Tizim xulq-atvori:

Dastlab (0–5 s) umumiy yechimda so‘nuvchi tebranish sezilarli bo‘ladi.

Vaqt o‘tishi bilan $e^{-t/2}$ nolga intiladi , faqat 5sint qoladi.

Bu hodisa dempferlangan rezonans yoki turg‘un tebranish holatiga o‘tish deb ataladi.

Amaliy mashg‘ulot uchun topshiriqlar
1-topshiriq: Tenglama tuzish
Berilgan zanjir:

- $R = 3\,\Omega, L = 2\,H, C = 0.5\,F,$
- $\mathcal{E}(t) = 0$

1.1. RLC konturga differensial tenglamani tuzing.
1.2. Xarakteristik tenglamani tuzing va ildizlarini toping.
1.3. Umumiy yechimni yozing.
1.4. Dastlabki shartlar: $q(0) = 1, I(0) = 0$ bo‘lsa, C_1, C_2 ni hisoblang.
1.5. Tok funksiyasi $I(t) = \frac{dq}{dt}$ ni toping.

2-topshiriq: Nojinsli tenglama yechimi (tajriba usuli)

Berilgan:

- $R = 1\,\Omega, L = 1\,H, C = 1\,F,$
- $\mathcal{E}(t) = 4\cos(2t)$

2.1. Differensial tenglamani tuzing.
2.2. Bir jinsli tenglamani yeching (xarakteristik ildizlar va umumiy yechim).
2.3. Xususiy yechim uchun tajriba funksiyasini tanlang.
2.4. Umumiy yechimni yozing: $q(t) = q_{\text{umumiy}} + q_{\text{xususiy}}$

2.5. Agar $q(0) = 0, q'(0) = 0$ bo‘lsa, doimiylarni toping

3-topshiriq: Rezonans sharti

Berilgan:

$L = 1\,H, C = 1\,F$ kuchlanish manbasi $\mathcal{E}(t) = 10\cos(\omega t)$

3.1. Zanjir uchun rezonans chastotasini hisoblang:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

3.2. Agar $\omega = \omega_0$ bo‘lsa, tizim qanday xulq ko‘rsatadi?
3.3. Fizik jihatdan rezonans qanday oqibatlarga olib keladi?