

15-mavzu: Elastik element(prujina) va og'irlik sistemasi orqali umumiy yechimlarni tahlil qilish

1. qisqacha tushunchalar bilan tanishamiz

Prujina–massa tizimi mexanik tebranishlarning eng sodda, ammo juda muhim modelidir. Bu model mexanik qurilmalarda, seysmik himoya tizimlarida, avtomobil amortizatorlarida, elektr analoglarida va hatto biomexanika jarayonlarida uchraydi.

Tizim asosan quyidagilardan iborat:

- Massa m — harakat qiluvchi jism
- Prujina k qattiqlik koeffitsienti bilan
- Dempfer (suyuqlik yoki ishqalanish elementi) — viskoz qarshilik kuchi c koeffitsienti bilan

2. Matematik model

Tizimga Nyutonning ikkinchi qonunini qo'llaymiz. Agar $y(t)$ — massaning muvozanatdan og'ishi bo'lsa, unga ta'sir qiluvchi kuchlar:

1.Prujina kuchi:

$$F_s = -ky$$

2.Qarshilik kuchi:

$$F_d = -cy$$

3.Massaning inersiya kuchi:

$$F_m = m\ddot{y}$$

Nyutonning 2-qonuni bo'yicha:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

Bu ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama bo'lib, c ga qarab tizimning xatti-harakati o'zgaradi.

3. Tabiiy chastota va dempfirlash nisbati

Tizimni tahlil qilishda quyidagi kattaliklar kiritiladi:

- Tabiiy burchak chastota:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}]$$

- Dempfirlash nisbati:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

ζ tizimning tebranish tipini aniqlaydi:

- a) $\zeta=0$ — undamped (soʻnmas tebranishlar)
- b) $0<\zeta<1$ — underdamped (soʻnuvchi tebranishlar)
- d) $\zeta=1$ — critical damping (kritik soʻnish)
- e) $\zeta>1$ — overdamped (juda sekin qaytish, tebranishsiz)

4. Yechimlarning tahlili

4.1. Undamped ($\zeta=0$)

Tenglama:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

Umumiy yechim

$$y(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \quad \text{yoki} \quad y(t) = C \cos(\omega_n t - \varphi)$$

- a) Amplituda doimiy, energiya saqlanadi.
- b) Harakat sof garmonik.

4.2. Underdamped ($0<\zeta<1$)

Tenglama:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

Kompleks ildizlar:

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Umumiy yechim:

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t))$$

- a) Amplituda eksponensial kamayadi.
- b) Tizim tebranish bilan muvozanat holatiga keladi.
- d) Logarifmik dekrement:

$$\delta = \ln \frac{y_{\max,k}}{y_{\max,k+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

4.3. Critically damped ($\zeta=1$)

Tenglama ildizlari teng:

$$r_1 = r_2 = -\omega_n$$

Yechim:

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

- a) Eng tez muvozanatga qaytish, tebranishsiz.
- b) Amortizatorlar dizaynida ideal soʻnish holati.

4.4. Overdamped ($\zeta>1$)

Ildizlar haqiqiy va turli:

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Yechim:

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

- a) Tebranish yoʻq, juda sekin qaytish.
- b) Juda katta qarshilik mavjud.

5. Grafik tahlil

Quyidagi grafiklar tizimning har xil ζ qiymatlarida qanday harakat qilishini ko'rsatadi:

- Undamped: doimiy amplituda sinus.
- Underdamped: eksponensial konvert ostidagi sinus.
- Critical: egri chiziq tez tushib, tebranishsiz nolga yaqinlashadi.
- Overdamped: ikki eksponenta kombinatsiyasi, juda sekin pasayish.

6. Fizik talqin

- Undamped tizimlar ideal holat, real hayotda doim $c > 0$.
- Underdamped — ko'pchilik mexanik tizimlar shu holatda ishlaydi, chunki tebranishlar kerakli vaqt ichida so'nadi.
- Critical damping — tebranishlarni butunlay bartaraf etib, eng tez muvozanatga qaytaradi (amortizatorlar).
- Overdamped — juda sekin qaytish, foydali bo'lmasligi mumkin.

Misol 1 (Undamped):

$$m = 1, k = 9, c = 0, y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 0.$$

$$\omega_n = 3 \text{ rad/s,}$$

$$y(t) = 0.1 \cos(3t)$$

Misol 2 (Underdamped):

$$m = 2, k = 200, c = 20, y(0) = 0.05, \dot{y}(0) = 0$$

$$\omega_n = 10, \zeta = 0.5, \omega_d = 5\sqrt{3}$$

$$y(t) = e^{-5t} \left(0.05 \cos(5\sqrt{3}t) + \frac{0.05}{\sqrt{3}} \sin(5\sqrt{3}t) \right)$$

Amaliy topshiriqlar

1-topshiriq:

$$m = 0.5, k = 72, c = 0, y(0) = 0.04, \dot{y}(0) = -0.2$$

Uchun ω_n ni toping, yechimni yozing.

2-topshiriq:

$m = 1, k = 100, c = 5$ bo'lsa:

a) $\omega_n, \zeta, \omega_d$ ni hisoblang.

b) Tizim turini aniqlang.

c) Boshlang'ich shartlar $y(0) = 0.1, \dot{y}(0) = 0$ bo'lsa, yechimni toping.

3-topshiriq (mustaqil):

$m = 0.25, k = 25, c = 8$ uchun

a) Tizim turini aniqlang

b) r_1, r_2 ni toping

d) $y(0) = 0.02, \dot{y}(0) = 0$ shartida yechimni yozing