2-amaliy mashg’uloti

O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar.

O‘ng tomoni faqat x ga bog’liq bo‘lgan funksiya bilan faqat y ga bog’liq bo‘lgan funksiyaning ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamani qaraylik. Bu tenglamani quyidagicha o‘zgartirib ($f_2(y)\neq 0$ deb faraz qilib) yozamiz:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \qquad (1')$$

y ni x ning ma’lum funksiyasi deb hisoblab $(1')$ tenglikni ikkita differensialning tengligi deb qarash mumkin; ulardan olingan aniqmas integrallar bir-biridan o‘zgarmas qo‘shiluvchi bilan farq qiladi. $(1')$ tenglikni chap tomonini y bo‘yicha, o‘ng tomonini x bo‘yicha integrallasak,

$$\int \frac{1}{f_2(y)}dy = \int f_1(x)dx + C$$

hosil bo‘ladi. Biz y yechim, x erkli o‘zgaruvchi va ixtiyoriy C o‘zgarmas miqdorni bog’lovchi munosabatni, ya’ni (1) tenglamaning umumiy integralini xosil qildik.

1. $(1')$ differensial tenglama tipidagi

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (2)$$

tenglama *o‘zgaruvchilari ajralgan* differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning umumiy integrali yuqorida isbot qilganimizga ko‘ra:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

1-misol. O‘zgaruvchilari ajralgan

$$xdx + ydy = 0$$

tenglama berilgan.

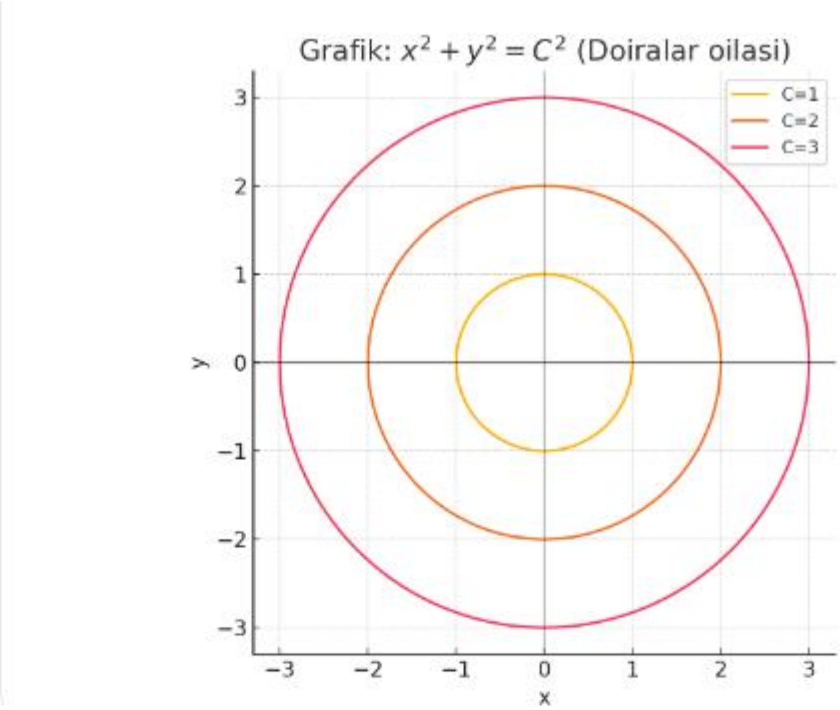
Buni integrallasak,

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

umumiy integralni hosil qilamiz. Keying tenglikning chap tomoni manfiy bo‘lmagani uchun, uning o‘ng tomoni ham manfiy emas. $2C_1$ ni C^2 bilan belgilasak,

$$x^2 + y^2 = C^2$$

Tenglikni hosil qilamiz.



Bu markazi koordinata boshida va radiusi C bo‘lgan konsentrik aylanalar oilasining tenglamasidir.

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglama *o‘zgaruvchilari ajraladigan* differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning ikkala tomonini $M_2(x)N_1(y)$ ifodaga bo‘lish yo‘li bilan uni o‘zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltirish mumkin:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_1(y)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{M_2(x)N_1(y)}dy = 0$$

yoki

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

ya’ni biz (2) ko‘rinishdagi tenglama hosil qildik.

2-misol.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

tenglama berilgan.

O‘zgaruvchilarini ajratib, integrallasak:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

ya’ni

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$$

yoki

$$\ln|y| = -\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Tenglik hosil bo‘ladi; bundan $y = \frac{C}{x}$ umumiy integralni topamiz:

$$\frac{(1+x)}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0.$$

Munosabatni hosil qilamiz. Keying munosabat berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

4-misol. Ma’lum bo‘lishicha har ber berilgan momentda radiyning yemirilish tezligi uning miqdoriga to‘g’ri proporsianaldir. Agar $t = 0$ bo‘lganda radiyning massasi m_0 bo‘lsa, radiy massasining vaqtga qarab o‘zgarish qonuni aniqlansin.

Yemirilish tezligi quyidagicha aniqlanadi, t vaqtda radiyning massasi m, $t + \Delta t$ vaqtda esa $m + \Delta m$ bo‘lsin, Δt nuqta radiyning Δm qadar massasi yemirilgan bo‘ladi. $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ nisbat yemirilishning o‘rtacha tezligini bildiradi. $\Delta t \to 0$ da bu nisbatning nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

t vaqtda radiyning yemirilish tezligi deyiladi.

Masalaning shartiga ko‘ra

$$\frac{dm}{dt} = -km, \qquad (4)$$

bunda k proporsionallik koeffitsienti $(k > 0)$. bu yerda minus ishora vaqt o‘sishi bilan radiyning miqdori kamaygani uchun olindi $\left(\frac{dm}{dt} < 0\right)$.

(4) tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dm}{dt} = -kdt$$

tenglamani yechamiz:

$$\ln m = -kt - \ln C.$$

Bundan

$$\ln \frac{m}{C} = -kt, \quad m = Ce^{-kt}. \qquad (5)$$

$t = 0$ bo‘lganda radiyning massasi m_0 bo‘lgani uchun C

$$m_0 = Ce^{-k_0} = C$$

Munosabatni qanoatlantirishi kerak. C ning qiymatini (5) tenglikka qo‘yib, radiy massasini vaqtning vaqtning funksiyasi kabi ifodalovchi izlanayotgan munosabatni topamiz:

$$m = m_0 e^{-kt}. \qquad (6)$$

k koeffitsient kuzatishlardan quyidagicha aniqlanadi. t_0 aqtd

Shunday qilib, radiy uchun $k = 0{,}00044$ ekani aniqlangan edi (vaqtning o‘lchov birligi yil hisobida olinadi). k ning bu qiymatini (6) formulaga qo‘ysak,

$$m = m_0 e^{-0{,}00044t}.$$

Radiyning yarim parchalanish davrini, ya’ni radiyning dastlabki massasining yarmini parchalanishi uchun ketadigan vaqtni topamiz. Keying formulada m ning o‘rniga $\frac{m_0}{2}$ ni qo‘yib, yarim parchalanish davri T ni toppish uchun tenglama hosil qilamiz:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}00044T},$$

bundan

$$-0{,}00044T = -\ln 2,$$

yoki

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}00044} = 1590 \ yil.$$

Izoh.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad yoki \quad dy = f(x)dx$$

tenglama eng sodda ko‘rinishdagi o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamadir. Buning umumiy integrali

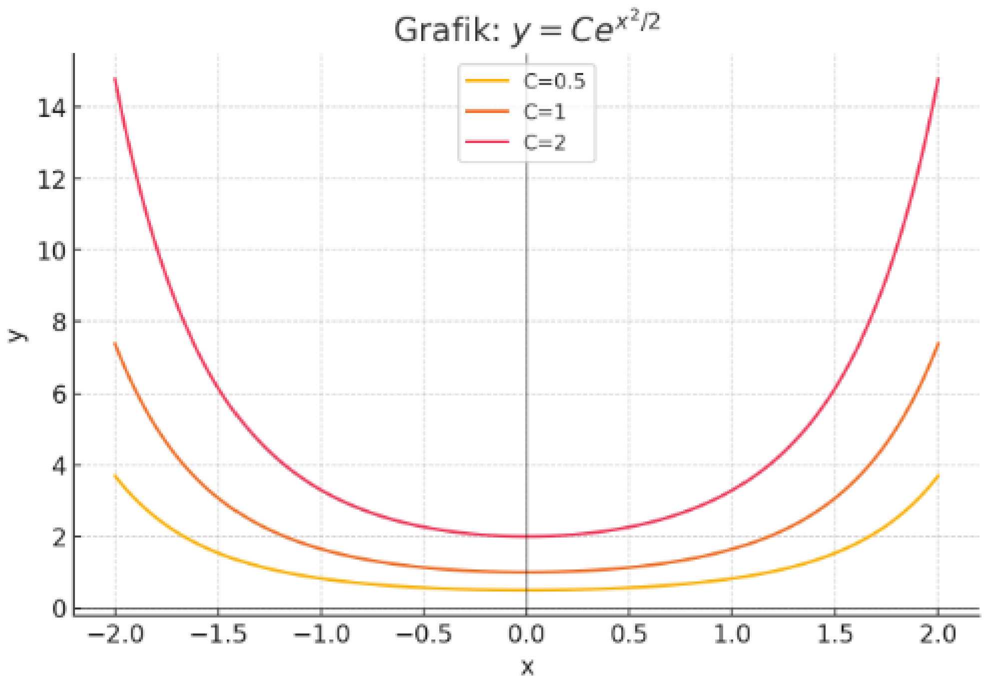
$$y = \int f(x)dx + C$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

5-misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping:

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

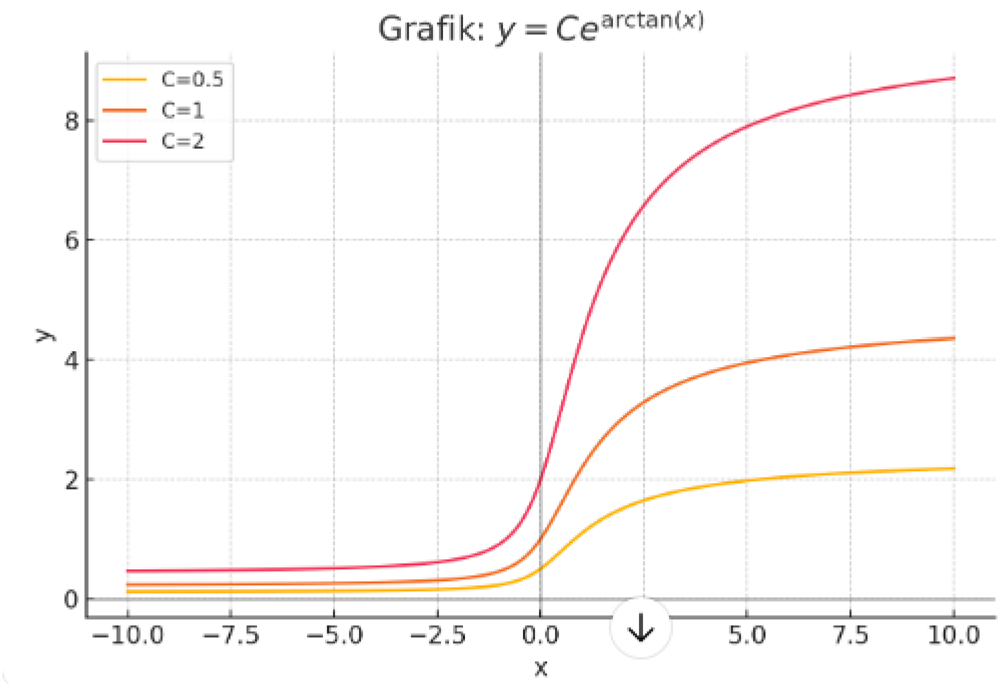
$$\frac{1}{y}dy = xdx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int xdx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = Ce^{x^2/2}$$



6-misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow \ln|y| = \arctan(x) + C \Rightarrow y = Ce^{\arctan(x)}$$



7-misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

$$y\,dy = 2x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 + C \Rightarrow y^2 = 2x^2 + C_1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x^2 + C_1}$$

Savollar

1. Quyidagi tenglama o‘zgaruvchilari ajralganmi? $\frac{dy}{dx} = y + x$
2. Agar $\frac{dy}{dx} = x \cdot \cos(y)$, qanday qilib ajratasiz?
3. $\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \sin(x)$ tenglamasini ajratib yozing.
4. O‘zgaruvchilarni ajratgach, nima qilish kerak?

Uyga vazifa

1. Quyidagi tenglamalarni yeching:
   - $\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln(x)$
   - $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
   - $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \cdot y^2$
2. Har birining **grafik integral chizig‘ini chizing.**