

3-amaliy mashg'uloti

O'zgaruvchilariga nisbatan bir jinsli va unga keltiriladigan bir jinsli tenglamalar. Umumlashgan bir jinsli tenglamalarni integrallash usullari. O'zgarvasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamasi

1. Bir jinsli differensial tenglama:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

yoki quyidagicha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (\text{agar } \frac{P}{Q} \text{ faqat } \frac{y}{x} \text{ ga bog'liq bo'lsa})$$

O'zgaruvchi almashtirish:

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx, \quad \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

Natijada, tenglama z ga nisbatan ajratilgan o'zgaruvchili ko'rinishga keladi.

2. Unga keltiriladigan tenglama:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

Mos almashtirish bilan bir jinsli ko'rinishga keltiriladi.

3. Umumlashgan bir jinsli tenglama:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

To'g'ri chiziqli almashtirish bilan bir jinsli tenglamaga keltiriladi.

4. O'zgarvasni variatsiyalash usuli:

Agar

$$y' + p(x)y = q(x)$$

bo'lsa, bir jinsli qismi:

$$y' + p(x)y = 0$$

yechiladi, so'ngra yechimdagi o'zgarvas C variatsiya qilinadi.

5. Bernulli tenglamasi:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

O'zgaruvchi almashtirish:

$$z = y^{1-n}$$

6. Rikkati tenglamasi:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

Agar xususiy yechim $y_1(x)$ topilsa, o'zgaruvchilarni almashtirish orqali chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Fizik jarayonlarga bog'liq masalalar.

Topshiriq 1. Issiqlik tarqalishi:

Masala: Uzun novda bo'ylab harorat o'zgarishini quyidagi tenglama bilan ifodalash mumkin:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

bu yerda y – novda ustidagi harorat, x – masofa.

Yechish yo'li:

Bu tenglama **bir jinsli** ko'rinishda, o'zgartirish bilan ajratilgan o'zgaruvchili tenglamaga o'tkaziladi:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx, \quad \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{x + zx}{x - zx} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{1 + z}{1 - z} - z = \frac{1 + z - z(1 - z)}{1 - z} = \frac{1 + z - z + z^2}{1 - z} = \frac{1 + z^2}{1 - z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1 + z^2}{x(1 - z)}$$

$$\frac{1-z}{1+z^2} dz = \frac{1}{x} dx$$

Chap tarafni quyidagicha ajratib integrallaymiz:

$$\int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

Chap taraf:

$$\int \frac{1}{1+z^2} dz - \int \frac{z}{1+z^2} dz = \arctan(z) - \frac{1}{2} \ln(1+z^2)$$

yechimimizda quyidagi umumiy natija chiqadi:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \ln |x| + C$$

$z = \frac{y}{x}$, shuning uchun:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y/x + 1}{y/x - 1} \right| = \ln |x| + C$$

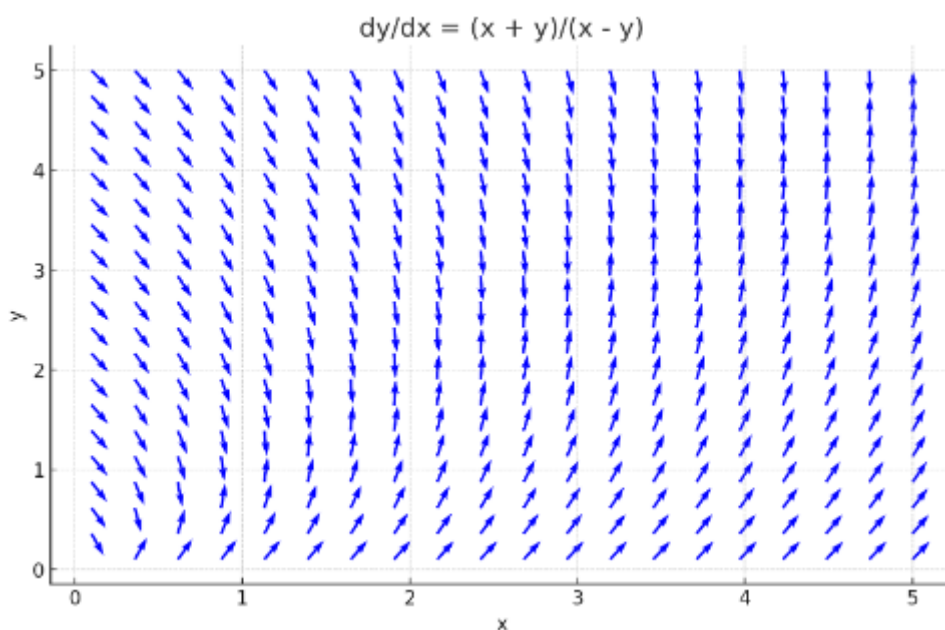
$$\ln \left| \frac{y+x}{y-x} \right| = 2 \ln |x| + C'$$

$$\ln \left| \frac{y+x}{y-x} \right| = \ln(x^2) + C$$

yoki

$$\frac{y+x}{y-x} = Cx^2$$

Grafigi quyidagicha bo'ladi



Qo‘shimcha fizik topshiriqlar (mustaqil ishlash uchun):

Topshiriq 2. Suv sathi o‘zgarishi (tankda):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Topshiriq 3. Elektr zanjiridagi kuchlanish o‘zgarishi:

Masala: R-L (rezistor-induktans) zanjiridagi kuchlanish o‘zgarishi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 3}{x + y + 1}$$

bu yerda y – zanjirdagi tok kuchi, x – vaqt.

Topshiriq 4. Harakatdagi zarraning tezligi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + y}$$

Topshiriq 5. Yadro reaksiyasidagi konsentratsiya:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Umumlashgan bir jinsli tenglamalarni integrallash usullari.

Topshiriq 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x - y + 2}$$

Vazifa:

1. Bu tenglamani umumlashgan bir jinsli tenglama sifatida aniqlang.
2. Mos o'zgartirish bilan uni bir jinsli ko'rinishga keltiring.
3. O'zgartirish:

$$x = X - 1, y = Y - 1$$

4. Ajratilgan o'zgaruvchilar bilan yeching.
5. Grafikini chizing.

Topshiriq 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 4}{3x + y - 1}$$

Vazifa:

1. Ko'rinish bo'yicha umumlashgan bir jinsliligini aniqlang.
2. O'zgartirish:

$$x = X + a, y = Y + b$$

3. a,b larni doimiy hadlarni yo'qotish uchun aniqlang.
4. Ajratilgan o'zgaruvchilar usuli bilan yeching.

Topshiriq 3. (fizik model asosida)

Zaryadlangan zarraning harakati:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y + 1}$$

Tavsif:

Bu tenglama elektr maydonda harakatlanayotgan zarraning holatini ifodalaydi.

Vazifalar:

1. Zarraning harakat yo'nalishini toping.
2. $Z = Y/X$ almashtirish bilan tenglamani ajratilgan ko'rinishga keltiring.
3. Yechimini toping va harakat yo'nalishini grafikda ko'rsating.

O'zgarmasni variatsiyalash usuli.

Topshiriq 1.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x$$

Vazifalar:

1. Homogen tenglama yechimini toping.
2. O'zgarmasni variatsiyalab, umumiy yechimni aniqlang.
3. Yechimni grafikda tasvirlang.

Topshiriq 2.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \ln x, \quad x > 0$$

Vazifalar:

1. Integrallovchi omil toping:
$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx}$$
2. O'zgarmasni variatsiyalash usuli yordamida yechimni toping.
3. Kompyuterda grafigini chizing.

Topshiriq 3. Fizik mazmunli masala (RC-zanjir):

Elektr zanjirda tok kuchining o'zgarishi:

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = \frac{E}{R}$$

Vazifa:

1. R, C, E doimiylar uchun umumiy ifodada yechimini toping.
2. O'zgarmasni variatsiyalashni qo'llang.
3. Misol uchun:

$R = 1 \Omega, C = 2 F, E = 10 V$ ni qo'yib, grafik chizing.

Topshiriq 4. Issiqlik tarqalishi modeli:

$$\frac{du}{dt} + ku = A$$

bu yerda $u(t)$ – harorat, k, A – musbat doimiylar.

Vazifalar:

1. Yordamchi yechim toping
2. O'zgarishni variatsiyalang
3. Fizik mazmunli grafik yasang (masalan,

$$k = 0.1, A = 30, u(0) = 0)$$

Bernulli va Rikkati tenglamasi

Bernulli tenglamasi

Topshiriq 1.

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2$$

Vazifalar:

- Bernulli tenglamasining turini aniqlang ($n = 2$)
- O'zgartirish:

$$z = y^{-1}$$

Yangi chiziqli tenglamani yeching

Grafigini chizing

Topshiriq 2.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2y^3, \quad x > 0$$

Vazifalar:

1. O'zgartirish kiriting:

$$z = y^{-2}$$

2. Yechimni analitik toping
3. Python yoki Desmos'da grafik yasang

Fizik model (Topshiriq 3):

Diffuziya modelidagi oqim tezligi:

$$\frac{dv}{dt} + kv = \frac{A}{v^2}$$

Vazifa:

1. $z = v^{-2}$ deb o'zgartiring
2. Yechimni aniqlang
3. $k=0.1$, $A=5$ uchun grafik yasang

Rikkati tenglamasi

Topshiriq 4.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y + 1$$

Tavsif: Bu tenglama:

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2$$

Vazifalar:

1. O'zgartirish:

$$y = 1 + \frac{1}{u}$$

2. Yangi tenglama $u(x)$ uchun chiziqli bo'ladi
3. Integrallab yechim topilsin
4. Grafikda ko'rsating

Topshiriq 5.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y^2 + 3xy + 2$$

Vazifalar:

1. $y_1(x)$ – xususiy yechimni taxmin qiling yoki berilgan holda oling
2. $y = y_1 + \frac{1}{u}$ o'zgartirish kiriting
3. Yangi chiziqli tenglama tuzing va yeching

Fizik model (Topshiriq 6):

O'ta o'tkazuvchanlikda tok kuchining o'zgarishi:

$$\frac{di}{dt} = ai^2 + bi + c$$

Vazifa:

- a, b, c – doimiylar uchun umumiy yechim toping
- i(t) grafigini yasang (masalan: a=1, b=-2, c=1)

Misollar

1. $xy' - 2y = 2x^4$ tenglamani yeching.
2. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ tenglamani yeching.
3. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$ tenglamani yeching.
4. $x^2y' + xy + 1 = 0$ tenglamani yeching.
5. $y = x(y' - x \cos x)$ tenglamani yeching.
6. $2x(x^2 + y)dx = dy$ tenglamani yeching.

Quyidagi Bernulli tenglamalarini yeching:

1. $y' + 2xy = 2xy^2$
2. $2y' - y = \frac{1}{y}e^x$
3. $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$
4. $y' + 2xy = y^2e^{x^2}$
5. $y' - 2xe^x = 2\sqrt{y}e^x$

$$6. 2y' \ln x + \frac{y}{x} = y^{-1} \cos x$$

$$7. 2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x$$

$$8. (x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$$

$$9. y' - y \cos x = y^2 \cos^2 x.$$

Nazorat savollari:

1. Umumlashgan bir jinsli tenglama qanday belgilanadi?
2. Qanday sharoitda u bir jinsli ko‘rinishga keltiriladi?
3. Ajratilgan o‘zgaruvchilar usuli nima va u qachon qo‘llaniladi?
4. Fizikada bunday tenglamalar qanday hodisalarni ifodalaydi?
5. O‘zgarmasni variatsiyalash usulining mohiyati nimada?
6. Qanday tenglamalarga bu usul qo‘llaniladi?
7. Yordamchi yechim qanday topiladi?
8. Bu usul fizikada qanday jarayonlarni yechishda ishlatiladi?
9. Bernulli tenglamasi qanday taniladi?
10. Rikkati tenglamasi uchun qanday o‘zgartirish kiritiladi?
11. Bernulli tenglamasi fizikada qanday jarayonlarda uchraydi?
12. Rikkati tenglamasi qanday tizimlarda qo‘llaniladi?