5-mavzu amaliy mashg'uloti

Birinchi tartibli tenglama uchun Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema

Yechimning mavjudligi va yagonaligi teoremasi

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

boshlang'ich sharti bilan:

$y(x_0) = y_0.$

Faraz qilaylik, yopiq R sohada $(|x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b)$ funksiya f va uning hosilasi $\frac{\partial f}{\partial y}$ uzluksiz. Unda, ba'zi oraliqda $x_0 - c \leq x \leq x_0 + c,$ tenglama (1) ning boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud. Bu yerda $c = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ qilib olinadi, bu yerda M — f funksiyasining qiymatlarining moduli ustidan baho bo'lib, ya'ni $|f| \leq M$ bo'lgan istalgan haqiqiy son. Yechim quyidagi rekurrent formula orqali aniqlanadi:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \ y_{k-1}(t)\right) dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Bu ketma-ketlik tenglama (1) ning yechimiga bir xil yaqinlashadi**.**

Eslatma:

Yechimning mavjud bo'lishi uchun f(x,y) funksiyasining uzluksizligi yetarli. Biroq bu holatda yechim yagona bo'lmasligi mumkin.

Tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \quad \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad (2)$$

vektorli yozuvda quyidagicha ifodalanadi:

$$y' = f(x, y), \qquad (3)$$

Bu yerda, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ va $f = (f_1, \ldots, f_n)$ vektorlardir.

Vektor-funksiyalarning uzluksizligi — har bir funksiyaning $f_1, \ldots, f_n$ uzluksizligi,
va $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ qisman hosilalardan iborat matritsa ko‘rib chiqiladi, $i, k = 1, \ldots, n.$

echimning mavjudligi va yagonaligi teoremasi hamda oldingi banddagi barcha natijalar (1) va (3) ko‘rinishidagi sistemalarga ham taalluqlidir.

Bu yerda $|y|$ vektorning uzunligini bildiradi: $|y| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$

n-tartibli tenglamalar uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi teoremasi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad (4)$$

Aytaylik, (4) tenglamada f funksiyasi va birinchi $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ hosilalarga nisbatan qisman hosilalar uzluksiz.
Boshlang‘ich shartlar:

$$y(x_0) = y_0^{(0)}, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

bo‘yicha yagona yechim mavjud**.**

Tenglama (4) ni quyidagi almashtirish orqali (2) ko‘rinishidagi sistemaga keltirish mumkin:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Unda (4) tenglama quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = y_n, \quad y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n),$$

ya’ni bu (2) ko‘rinishdagi sistemaning xos holidir va unga nisbatan oldingi teorema qo‘llaniladi.

Eslatma 1:

Agar (4) tenglamaning yechimi mavjud bo‘lsa, bu yechim ko‘pincha kichik oraliqda bo‘ladi. Bu (2) sistemasiga nisbatan ham to‘g‘ri.

Eslatma 2**:**

Agar (4) tenglama x∈R yopiq va chegaralangan sohada uzluksizlikni qanoatlantirsa, u holda ham yechim mavjudligi teoremasi amal qiladi.

Agar (1) tenglama yoki (3) sistemaning o‘ng tomoni $\alpha < x < \beta, |y| < \infty$ oraliqda (bu yerda α va β sonlari chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin) uzluksiz bo‘lib, quyidagi noaniqlikni qanoatlantirsa:

$$|f(x,y)| \leq a(x)|y| + b(x),$$

va funksiyalar $a(x)$ va $b(x)$ uzluksiz bo‘lsa, u holda har qanday yechimni butun α<x<β oraliqqa **davom ettirish mumkin.**

Quyidagi tenglamalar uchun berilgan boshlang‘ich shartlar asosida y_0, y_1, y_2 yaqinlashuvlarini tuzing:

a) $y' = x - y^2, \quad y(0) = 0$

b) $y' = y^2 + 3x^2 - 1, \quad y(1) = 1$

v) $y' = y + e^{1/y}, \quad y(0) = 1$

g) $y' = 1 + x \sin y, \quad y(\pi) = 2\pi$

Quyidagi Formuladan foydalanamiz:

$$y(x_0) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}_0$$

a) holatda quyidagilar berilgan:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_0(t) = y_0 = 0$$

Shu sababli,

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x \left(t - y_n^2(t)\right)\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}_0 \qquad (1)$$

Agar n=0 bo‘lsa, birinchi yaqinlashuv quyidagicha:

$$y_1(x) = \int_0^x \left(t - y_0^2(t)\right)\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}$$

(1)ga n=1 ni qo‘ysak, ikkinchi yaqinlashuv:

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t - y_1^2(t)\right)\, dt = \int_0^x \left(t - \left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right)\, dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}$$

b) holat

Chunki y(0)=1, demak

$$y_0(t) \equiv 1, \quad x_0 = 0$$

Shuning uchun

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \left(y_n(t) + e^{y_n(t)-1}\right)\, dt$$

Bu formuladan, n=0 bo‘lganda quyidagini olamiz:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + e^{1-1}\right)\, dt = 1 + 2x$$

Endi n=1 bo‘lganda:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + e^{2t}\right)\, dt = \frac{1}{2} + x + x^2 + \frac{1}{2}e^{2x}$$

Quyidagi tenglamalar va sistemalarning yechimlariga (boshlang‘ich yaqinlashuv hisobga olinmagan holda) **ikkita ketma-ket yaqinlashuvni** tuzing:

a)

$$y' = 2x + z, \quad z' = y; \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 0.$$

b)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x^2; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

v)

$$y'' + y^2 - 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$