7-mavzu: Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalar va ularni integrallash usullari

Reja:

- Hosilaga nisbatan yechilmagan sodda differensial tenglamalar
- Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglama uchun Koshi masalasi
- Misollar yechish

Bizga ushbu

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamaning sodda ko‘rinishlarini integrallash bilan shug’ullanamiz. Bu yerda $y = f(x)$ noma’lum funksiya.

1. Aytaylik (1) differensial tenglamada F funksiya faqat y' ga bog’liq, ya’ni

$$F(y') = 0 \qquad (2)$$

bo‘lsin. Agar bu tenglama

$$y' = k_j \, (j = 1, 2, \ldots), \quad k_j = const \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi haqiqiy ildizlarga ega bo‘lsa, u holda (3) differensial tenglamadan

$$y = k_j x + c, \quad c = const,$$

yoki

$$k_j = \frac{y - c}{x}$$

kelib chiqadi. Bundan ko‘rinadiki (2) differensial tenglamaning umumiy integrali uchun quyidagi

$$F\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0 \qquad (4)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

2. Faraz qilaylik (1) differensial tenglamada F funksiya faqat x va y' o‘zgaruvchilarga bog’liq, ya’ni

$$F(x, y') = 0 \qquad (5)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglama berilgan bo‘lsin.

1) Agar bu tenglamani y' ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, u holda

$$y' = f_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamalar hosil bo‘ladi. Bu yerda $f_k(x)$ lar biror $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz funksiyalar.

Yuqoridagi (6) differensial tenglamani integrallab uning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int f_k(x)dx + c, \quad k = 1, 2, \ldots; \qquad c = const$$

Bu yechimlar to‘plamiga (5) differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

2) Faraz qilaylik (5) tenglama x o‘zgaruvchiga nisbatan yechilgan, ya’ni

$$y = \Phi(y') \qquad (7)$$

Ko‘rinishdagi differensial tenglama berilgan bo‘lsin. Bu holda (7) differensial tenglamani integrallash uchun quyidagi usuldan foydalanamiz. Shu maqsadda $y' = p$ deb belgilaymiz.

Natijada (7) tenglama

$$x = \Phi(p) \qquad (8)$$

Ko‘rinishni oladi. Endi, belgilashdagi y' o‘rniga uning $\frac{dy}{dx}$ qiymatini qo‘yib

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad dy = pdx$$

Munosabatlarni topamiz. (8) tenglikni differensiallab

$$dx = \Phi'(p)dp$$

Munosabatni olamiz. Buni yuqoridagi tenglikka qo‘ysak

$$dy = pdx = p\Phi'(p)dp,$$

ya’ni

$$dy = p\Phi'(p)dp$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallash natijasida

$$y = \int p\Phi'(p)dp + c, \quad c = const \qquad (9)$$

kelib chiqadi. Demak (5) tenglama

$$\begin{cases} x = \Phi(x) \\ y = \int p\Phi'(p)dp + c, \qquad c = const \end{cases} \qquad (10)$$

ko‘rinishdagi yechimlar oilasiga ega bo‘lar ekan

3. Agar (1) differensial tenglama

$$F(y, y') = 0 \qquad (11)$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, u holda yuqoridagi ikki hol takrorlanadi.

1) Aytaylik (1) tenglamani y' ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, u holda

$$y' = f_j(y), \quad (j = 1, 2, \ldots) \qquad (12)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Bunda $f_k(y) \neq 0$ deb

$$\frac{dy}{f_k(x)} = dx, \quad x = \int \frac{dy}{f_k(x)} + c, \qquad c = const \qquad (13)$$

ko‘rinishdagi yechimlarni topamiz. Agar $f_k(y) = 0$ tenglama $y = b_m$ ko‘rinishdagi ildizga ega bo‘lsa, u holda $y = b_m$ uning yechimi bo‘ladi.

2) Agar (11) tenglamadan $y = y(x)$ funksiyani

$$y = \Phi(y') \qquad (14)$$

Topish mumkin bo‘lsa, u holda $y' = p$ almashtirishdan foydalanish mumkin:

$$dy = y'dx, \quad dy = pdx, \quad dx = \frac{1}{p}dy,$$

$$\begin{cases} x = \int \frac{\Phi'(p)}{p} dp + c, \\ y = \Phi(p). \end{cases}$$

Bu esa (11) differensial tenglamaning umumiy yechimini beradi.

Misol 1 (Mexanikada harakat trayektoriyasi):

Tenglama: $y\,y'=x$

Bu hosilaga nisbatan yechilmagan tenglama.

Yechimi:

1) $yy'=x \rightarrow$ ajratamiz:

$$y' = \frac{x}{y}$$

2) Ajraladigan tenglama:

$y\,dy=x\,dx$

3) Integrallaymiz:

$\int y\, dy = \int x\, dx$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

4) Yechim: $y^2 - x^2 = C$

Fizik mazmuni:

Bu tenglama gorizontalga nisbatan simmetrik trayektoriya – giperbola olinishini ko‘rsatadi (masalan, markazdan qochma kuch bilan bog‘liq harakatlarda hosil bo‘ladi).

Misol 2 (Optika: yorug‘lik nuri egilishi):

Yorug‘lik nuri egilish qonuni: $(y')^2 + y^2 = 1$

Bu y' ga nisbatan **yechilmagan**.

Yechish:

y' ni ajratamiz:

$$(y')^2 = 1 - y^2$$

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx$$

$$\arcsin y = \pm x + C$$

$$y = \sin\left(\pm x + C\right)$$

Fizik mazmuni:

Bu tenglama to‘lqinlarning sinusoidal trayektoriyasini, yoki optikada yorug‘likning silliq egilishi modelini ifodalaydi.

Misol 4 (Kuchlanish o‘zgarishi —ikkinchi tartibli hosila):

$$(y')^2 + 2xy = 0$$

Hosilaga nisbatan yechilmagan, chunki y' kvadratli.

Yechish:

Ajratamiz:

$$(y')^2 = -2xy$$

$$y' = \pm\sqrt{-2xy}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm\sqrt{-2x}dx$$

$$2\sqrt{y} = \pm\frac{2}{3}(-2)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$y = \left(C - kx^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

Fizik mazmuni:

Bunday jarayon energiya konservatsiyasida, masalan,

- gravitatsiya potensial energiyada,
- kuch kvadrat tenglamaga teng bo‘lganda, uchraydi.