



8-mavzu: Elastik element (prujina)ga ulangan
massaning harakati (Hooke qonuni asosida
2-tartibli tenglama bilan)

Reja:

Hooke qonuni va kuchlarning tahlili

- Model tenglamani chiqarish (2-tartibli differensial tenglama)
- Harakatning turlari va yechimlar
- Amaliy misollar
- Nazorat savollari va uyga vazifa

1. Hooke qonuni va kuchlarning tahlili

Hooke qonuni elastik jismlarning deformatsiyasi (choʻzilishi yoki siqilishi) va unga qarshi yoʻnalgan elastik kuch orasidagi bogʻliqlikni ifodalaydi:

$$F = -kx$$

Bu yerda:

F — elastik kuch (N)

k — prujinaning qattqlik (elastiklik) koeffitsienti (N/m)

x — muvozanat holatidan ogʻish (choʻzilish/siqilish miqdori)

Minus ishorasi — kuch har doim muvozanat holatiga qarab yoʻnalganligini bildiradi.

Kuchlar tahlili:

Prujinaga ulangan massaga quyidagi kuchlar taʼsir qiladi:

1. Ogʻirlik kuchi:

$$F_g = mg$$

2. Elastik kuch (Hooke kuchi):

$$F_e = -kx$$

3. Nyuton II qonuniga asosan inertsiya kuchi:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

4. Tenglamani tuzamiz:

Prujinaning harakati uchun kuchlar muvozanatga keltiriladi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Real hayotiy misol:

Liftida yuqoriga ko'tarilayotgan odam o'zini pastga "tortilgandek" his qiladi. Bu — massa muvozanatdan og'ayotganida unga elastik kuch ta'sir qilishining natijasi. Shuningdek, avtomobil tezlasa yoki tormozlasa, prujinalar bu kuchni o'zida to'plab, qayta chiqaradi.

2. Model tenglamani chiqarish (2-tartibli differensial tenglama)

Fizik modeldan matematik tenglamaga

Massasi m bo'lgan jism elastik prujinaga ulangan bo'lsin. Jism harakatga keltirilganda u tebranma harakatni bajaradi. Ushbu harakatni matematik modellashtirish uchun jismga ta'sir etuvchi kuchlarni tahlil qilamiz.

1) Nyutonning II qonuni (dinamika asosi):

$$F_{\text{umumiy}} = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Bu yerda $x(t)$ — jismning vaqtga bog'liq holati (koordinatasi).

2) Hooke qonuni bo'yicha prujinaning kuchi:

$$F_{\text{elastik}} = -kx$$

Elastik kuch har doim jismni muvozanat holatiga qaytarishga intiladi, shuning uchun bu kuch harakatga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.

3) Kuchlar muvozanati:

Prujinaga ulangan jism harakati faqat elastik kuch bilan belgilanadi (tashqi kuchlar yo‘q deb olamiz):

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Tenglamani soddalashtirish:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Bu — chiziqli gomogen 2-tartibli oddiy differensial tenglama.

Ko‘pincha quyidagicha belgilanadi:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Bu tenglama **garmonik tebranishlar tenglamasi** deb yuritiladi.

Hayotiy analogiya:

Xuddi attraksionda harakatlanayotgan odamga o‘xshab, prujinadagi jism ham muvozanatdan o‘tib turadi va har doim markazga qaytishga intiladi.

3. Harakatning turlari va yechimlar

1. Garmonik tebranishlar (dissipatsiyasiz)

Tenglama:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Umumiy yechim:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \text{yoki} \quad x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

Bu yerda:

A, B — boshlang'ich shartlardan topiladigan konstantalar

$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ — tebranish amplitudasi

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — burchak tezlik

φ — bosqich (fazaviy) siljish

Harakat sinusoid ko'rinishida bo'ladi.

Muvozanat holatidan tebranma harakat.

2. Harakatning grafik ko‘rinishi

Quyidagilarni chizamiz:

Holat $x(t)$: sinusoida egri chiziq

Tezlik $v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

Tezlanish $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

3. Yechimlarni boshlang‘ich shartlar bilan aniqlash

Masalan:

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0$$

Tenglamadan:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Boshlang‘ich shartlar:

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega}$$

Shunda:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

4. Harakat turlari (umumiy ko‘rinishda):

A. Garmonik tebranishlar

O‘z-o‘zidan tebranma harakat

Kuchlar: elastik kuch va inertsiya kuchi

Amplituda o‘zgarmaydi

Energiya saqlanadi

Tenglama:

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

B. O‘chuvchi (dissipativ) tebranishlar

Tormozlovchi kuch (masalan: ishqalanish, havo qarshiligi) mavjud

Amplituda asta-sekin kamayadi

Tenglama:

$$x'' + 2\beta x' + \omega^2 x = 0 \quad (\beta > 0)$$

C. Majburiy tebranishlar (tashqi kuch ta'sirida)

Tizimga tashqi kuch bilan tebranish beriladi

- Tizim muayyan chastotada tebranadi
- Rezonans holati yuzaga kelishi mumkin
- Tenglama:

$$x'' + \omega^2 x = f(t) \quad (\text{masalan: } f(t) = F_0 \cos(\Omega t))$$

4. Amaliy misollar

1-misol. Oddiy garmonik harakat

Shart: Massasi $m=1$ kg, qattqlik koeffitsienti $k=4$ N/m bo'lgan prujinaga osilgan jism boshlang'ich holatda

$x_0 = 0,1m$ va $v_0 = 0$ tezlik bilan harakatni boshlaydi.

Yechim:

Burchak tezlik:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{4} = 2 \text{ rad/s}$$

Umumiy yechim:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Rightarrow x(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

Boshlang'ich shartlardan:

$$\begin{aligned} x(0) &= A = 0.1 \\ v(t) &= -2A \sin(2t) + 2B \cos(2t), \quad v(0) = 2B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

Yakuniy yechim:

$$x(t) = 0.1 \cos(2t)$$

2-misol. Boshlang'ich tezlik mavjud

Shart:

Massasi

$$m = 2 \text{ kg}, k = 8 \text{ N/m}, x(0) = 0, v(0) = 1 \text{ m/s}$$

Yechim:

Burchak tezlik:

$$\omega = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ rad/s}$$

Umumiy yechim:

$$x(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

Boshlang'ich shartlardan:

$$\begin{aligned} x(0) &= A = 0 \\ v(0) &= 2B = 1 \Rightarrow B = 0.5 \end{aligned}$$

Yakuniy yechim:

$$x(t) = 0.5 \sin(2t)$$

Nazorat savollari

- Hooke qonunining fizik ma'nosi nima?
- Prujinaning differensial modeli qanday tuziladi?
- Tebranish davri va burchak tezlik orasidagi bog'liqlik qanday?
- Amplituda o'zgarsa – davrga ta'sir qiladimi?
- Garmonik harakat grafigi qanday ko'rinishda bo'ladi?