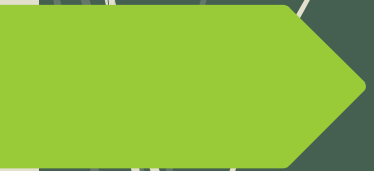


9-mavzu: Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan tenglamalar. Tenglamada noma'lum funksiya va uning hosilalari oshkor ko'rinishda qatnashmagan hol



REJA:

- ▶ Tartibini pasaytirish usuli tushunchasi.
- ▶ Tenglamada noma'lum funksiya yoki uning hosilasi oshkor ko'rinishda bo'lmagan hol.
- ▶ Yangi o'zgaruvchi kiritish orqali tenglama tartibini kamaytirish.
- ▶ Amaliy misollar yechimi.
- ▶ Fizikaga oid modellashtirish misollari.
- ▶ Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.
- ▶ Nazorat savollari.

1. Tartibini pasaytirish haqida umumiy tushuncha

Ba'zi differensial tenglamalar o'zgaruvchi yoki noma'lum funksiya (yoki uning hosilasi) oshkor ko'rinishda ishtirok etmaydi. Bunday tenglamalar o'zining ko'rinishiga qarab, o'zgartirishlar yordamida tartibini kamaytirish mumkin.

Masalan, agar tenglamada faqat y'' , y' qatnashib, y qatnashmasa, biz yangi o'zgaruvchi kiritish orqali uni birinchi tartibli tenglamaga keltirishimiz mumkin.

➤ 2. Noma'lum funksiya yoki uning hosilasi oshkor bo'lmagan hol

A) Noma'lum funksiya y oshkor qatnashmagan:

$$F(y', y'', x) = 0$$

Bu holatda $y'=p(x)$ deb belgilab, natijada $y''=p'$, shunda:

$$F(p, p', x) = 0$$

Hosil bo'lgan tenglama birinchi tartibli tenglama bo'lib, p ni topamiz, so'ngra:

$$y = \int p(x) dx + C$$

B) Noma'lum funksiya hosilasi y' oshkor qatnashmagan:

$$F(y, y'', x) = 0$$

Bu holatda $y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, lekin y' yo‘q. Shunda odatda $y=u$, $y''=u''$ ko‘rinishida olib, to‘g‘ridan-to‘g‘ri integrallash mumkin bo‘ladi.

3. Tartibni kamaytirish usuli — Yangi o‘zgaruvchi kiritish

Eng ko‘p ishlatiladigan o‘zgaruvchilar:

$p=y'$, natijada $y''=p'$

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

Birinchi tartibli tenglamalarga keltiriladigan ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning ba‘zi tiplarini qaraymiz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama noma'lum y funksiyani oshkor holda o'z ichiga olmaydi.

Yechish: $\frac{dy}{dx}$ hosilalarni p bilan belgilaymiz, ya'ni $\frac{dy}{dx} = p$. Bu holda

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

Hosilalarning bu ifodalarini (1) tenglamaga qo'yib, x ning noma'lum p funksiyasiga nisbatan birinchi tartibli

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab, uning

$$p = p(x, C_1)$$

umumiy yechimni topamiz, undan keyin $\frac{dy}{dx} = p$ munosabatdan (1) tenglamaning

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2$$

umumiy integralni topamiz.

1-misol. Zanjir chiziqning

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

differensial tenglamani qaraymiz.

$$\frac{dy}{dx} = p$$

deb belgilaymiz. U holda

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

demak, x ning yordamchi p funksiyasiga nisbatan birinchi tartibli

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2}$$

tenglama hosil bo'ladi.

O'zgaruvchilarni ajratsak,

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Bundan

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1, \quad p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\frac{x}{a} - C_2} \right).$$

$$\frac{dy}{dx} = p$$

bo'lgani uchun keying munosabat izlanayotgan y funksiyaga nisbatan differensial tenglamani ifodalaydi. Uni integrallasak, zanjir chiziqning tenglamasi hosil bo'ladi:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\frac{x}{a} - C_1} \right) + C_2.$$

Ushbu

$$y_{x=0} = a, \quad y'_{x=0} = 0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topamiz.

Birinchi shartdan $C_2 = 0$, ikkinchi shartdan esa $C_1 = 0$ ekani ko'rinadi.

natijada

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

hosil qilamiz.

Izoh. Shunday usul bilan

$$y^{(n)} = f(x, y^{(y-1)})$$

Tenglamani ham integrallash mumkin. $y^{(y-1)} = p$ deb olib, p ni aniqlash uchun birinchi tartibli

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bundan p ni x ning funksiyasi ko'rinishda ifodalab, $y^{(y-1)} = p$ munosabatdan y ni topamiz.

x erkli o'zgaruvchini oshkor holda o'z ichiga olmagan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (2)$$

ko'rinishdagi tenglama.

Bu tenglamani yechish uchun yana

$$\frac{dy}{dx} = p \quad (3)$$

deb olamiz. Ammo endi p ni oldingidek x ning funksiyasi emas, balki y ning funksiyasi deb hisoblaymiz. Bu holda

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

$\frac{dy}{dx}$ va $\frac{d^2y}{dx^2}$ hosilalarning ifodalarini (2) tenglamaga qo'yib, yordamchi p funksiyaga nisbatan birinchi tartibli

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p) \quad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz. Buni integrallab p ni y va ixtiyoriy C_1 o'zgarmas miqdorning funksiyasi kabi aniqlaymiz:

$$p = p(y, C_1)$$

Bu qiymatni (3) tenglamaga qo'ysak, x ning y funksiyasi uchun birinchi tartibli

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$$

differensial tenglama hosil bo'ladi.

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx$$

Bu tenglamani integrallab, dastlabki tenglamaning

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

umumiy integralni topamiz.

➤ 2-misol.

➤ $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$

➤ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

➤ Yechish: p ni y ning funksiyasi ekanini bilgan holda $\frac{dy}{dx} = p$ deb olamiz.

Bu holda $y'' = p \frac{dp}{dy}$ bo'ladi va biz yordamchi p funksiya uchun birinchi tartibli tenglama hosil qilamiz:

➤ $3p \frac{dp}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}$.

➤ Bu tenglamani integrallaymiz:

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}}, \text{ ya'ni } p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}$$

➤ Ammo $p = \frac{dy}{dx}$, demak, y ni aniqlash uchun

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}} = dx \text{ yoki } \frac{dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = dx$$

➤ tenglamani hosil qilamiz, bundan:

$$\pm x + C_2 = \pm \int \frac{y^{\frac{1}{3}} dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}}.$$

➤ keyingi integralni hisoblash uchun

$$\pm C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1 = t^2$$

➤ almashtirishni bajaramiz.

► Bu holda

$$y^{\frac{1}{3}} = (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}}; \quad dy = 3t(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{C_1^{\frac{2}{3}}} dt.$$

► Demak,

$$\int \frac{y^{\frac{1}{3}} dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = \frac{1}{C_1^{\frac{2}{3}}} \int \frac{3t(t^2 + 1)}{t} dt = \frac{3}{C_1^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) = \frac{1}{C_1^{\frac{2}{3}}} \sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1} (C_1 y^{\frac{2}{3}} + 2).$$

► Oxirida

►

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^{\frac{2}{3}}} \sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1} (C_1 y^{\frac{2}{3}} + 2).$$

► ekanligini topamiz.