11-mavzu: O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar

Reja:

- O‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar tushunchasi
- Bir jinsli tenglama va umumiy yechim
- Bir jinsli bo‘lmagan tenglamani yechish usullari
- Xususiy hollar: sinus, kosinus, ko‘paytuvchili tenglamalar
- Amaliy misollar va fizik modellar

1. ‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar tushunchasi

Chiziqli differensial tenglama umumiy ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

bu yerda:

$y^{(k)}$ — k-tartibli hosila,

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ — o‘zgarmas koeffitsientlar (doimiy sonlar),

f(x) — berilgan funksiya (agar f(x)=0 bo‘lsa, tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli bo‘lmagan deyiladi).

2. Bir jinsli tenglama va umumiy yechim

Agar f(x)=0 bo‘lsa, tenglama quyidagicha bo‘ladi:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Yechish usuli: Quyidagi xarakteristik tenglama tuziladi:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

Bu algebraik tenglamaning ildizlariga qarab umumiy yechim topiladi.

Ildizlarga qarab umumiy yechim turlari:

Turli haqiqiy ildizlar:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n \quad \Rightarrow \quad y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}$$

Takroriy ildizlar (multiplikatsiya marta):
Agar r - marta takrorlangan ildiz bo‘lsa:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_m x^{m-1}) e^{rx}$$

Kompleks ildizlar:
Agar r=α±iβ bo‘lsa:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Nojinsli tenglamani yechish usullari

Agar f(x)≠0 bo‘lsa, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Bu holda yechim quyidagicha bo‘ladi:

$$y(x) = y_{\text{umumiy}} + y_{\text{xususiy}}$$

- y_{umumiy}: bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi
  - y_{xususiy}: berilgan f(x) ga mos **xususiy yechim.**

Xususiy yechimni topish usullari:

Variatsiya usuli

Noaniq koeffitsientlar usuli

Xususiy hollar

Agar f(x) quyidagi ko‘rinishlarda bo‘lsa:

- $f(x) = P_n(x)$ — polinom (masalan: $x^2 + 3x$)
- $f(x) = e^{ax}$, $\sin(bx)$, $\cos(bx)$
- Yoki ularning ko‘paytmasi (masalan: xe^x, $\cos x \cdot x$)

bu holda xususiy yechimni topishda tajriba funksiyasi tanlanadi va unga noma’lum koeffitsientlar kiritiladi.

Amaliy misollar va fizik modellar

Misol 1:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Yechish:
Xarakteristik tenglama:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2$$

Umumiy yechim:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Misol 2:

$$y'' + y = \cos x$$

Umumiy yechim: bir jinsli tenglama uchun:

$$y'' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{umumiy}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Xususiy yechim: tajriba qilamiz:

$$y_{\text{xususiy}} = x \sin x \Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$$

Fizik qo‘llanilish:

Tezlik va siljish orasidagi bog‘lanish (massa-prujina modeli)

Elektr zanjirlar (RLC konturlar)

Issiqlik tarqalishi va to‘lqinlar tenglamasi soddalashtirilgan holatlarda