13-mavzu: O‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sistemasi

Reja:

- O‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasi tushunchasi
- Matritsa ko‘rinishi va umumiy formulasi
- Bir jinsli sistemaning yechimi (eigenvalue-eigenvector usuli)
- Bir jinsli bo‘lmagan sistemaning yechimi (umumiy + xususiy)
- Amaliy misol
- Fizik talqin
- Nazorat savollari

1. O‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasi tushunchasi

Bu — bir necha birinchi tartibli differensial tenglamalardan iborat bo‘lgan tizim bo‘lib, har bir tenglamada bir nechta noma’lum funksiya va ularning hosilalari ishtirok etadi.

Tizim umumiy ko‘rinishda:

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases}$$

bu yerda:

$x(t), y(t)$ — noma’lum funksiyalar (odatda vaqtga bog‘liq),

$f_1(t), f_2(t)$ — berilgan funksiya (agar $f_1(t), f_2(t) \neq 0,$ sistema **bir jinsli bo‘lmagan** bo‘ladi)

2. Matritsa ko‘rinishi va umumiy formulasi

Yuqoridagi sistema qulay shaklda matritsa ko‘rinishida yoziladi:

$$\mathbf{X}'(t) = A \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t)$$

bu yerda:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$ — noma’lum funksiyalar vektori,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ — koeffitsientlar matritsasi,

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$ — berilgan funksiya (tashqi ta’sir)

Bu shakl **kompakt, analiz qilishga oson** va algebraik metodlar bilan ishlashga qulay bo‘ladi.

3. Bir jinsli sistemaning yechimi

Agar $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$, ya’ni sistema **bir jinsli** bo‘lsa:

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X}$$

Bunday sistema quyidagicha yechiladi:

Matritsa A uchun xarakteristik tenglama tuziladi:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

O‘z qiymatlar λ_1, λ_2 topiladi

Har bir o‘z qiymatga mos **o‘z vektor** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ aniqlanadi.

Umumiy yechim:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Bu usul fizikada **ozod tebranishlar, energiya almashinuvi** kabi hodisalarni ifodalashda qo‘llaniladi.

4. Bir jinsli bo‘lmagan sistemaning yechimi

Agar $\mathbf{F}(t) \neq 0$ bo‘lsa — sistema tashqi kuch ta’sirida ishlaydi.

Tenglama:

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

Yechim ikki qismdan iborat:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_{\text{umumiy}}(t) + \mathbf{X}_{\text{xus}}(t)$$

5.Amaliy misol

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

1-bosqich: Matritsa shakli:

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

2-bosqich: Xarakteristik tenglama:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Ildizlar:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$$

3-bosqich: O‘z vektorlarni topish

1) $\lambda_1 = 1$

$$(A - I)\mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$$

Tanlaymiz:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) $\lambda_2 = 5$

$$(A - 5I)\mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = 3v_1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4-bosqich: Umumiy yechim (bir jinsli qism)

$$\mathbf{X}_{\text{umumiy}}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t}$$

5.Xususiy yechim (tajriba usuli)

Berilgan qo‘zg‘atuvchi:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tajriba:} \quad \mathbf{X}_{\text{xus}}(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t$$

Hosila olamiz

$$\mathbf{X}'_{\text{xus}}(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t$$

Tenglama o‘rniga qo‘yamiz

$$\mathbf{X}'_{\text{xus}} = A\mathbf{X}_{\text{xus}} + \mathbf{F}(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t$$

Koeffitsientlarni taqqoslaymiz:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + b + 1 \\ 3a + 4b \end{bmatrix}$$

Tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} a = 2a + b + 1 \\ b = 3a + 4b \end{cases}$$

1-tenglamadan:

$$a - 2a - b = 1 \Rightarrow -a - b = 1 \quad (1)$$

2-tenglamadan:

$$b - 4b = 3a \Rightarrow -3b = 3a \Rightarrow a = -b \quad (2)$$

(1) ga (2) ni qo‘yamiz:

$$-(-b) - b = 1 \Rightarrow b - b = 1 \Rightarrow 0 = 1$$

Natijada xato bo‘lib chiqdi, bu xatolik shuni anglatadiki**: tajriba yechim** sistemaning umumiy yechimi bilan **rezonans holatida to‘g‘ri keladi**, ya’ni e^t bir jinsli qismda ham bor.

Shuning uchun tajriba funksiyasini o‘zgartiramiz:

$$\mathbf{X}_{\text{xus}}(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} te^t$$

Hisoblab qo‘yamiz:

$$\mathbf{X}'_{\text{xus}} = \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} t \right) e^t$$

Yangi tenglama:

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} t \right) e^t = \left(A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t$$

Uzoq bo‘lganligi sababli yechim:

$$\mathbf{X}_{\text{xus}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} te^t$$

6-bosqich: Yakuniy yechim

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} te^t$$

6.Fizik talqin: O‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar sistemasi

Berilgan Sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Mazmuni:

Bu tenglamalar fizikada ikki o‘zgaruvchi orasidagi o‘zaro bog‘liqlikni ifodalaydi. Har bir o‘zgaruvchi vaqtga bog‘liq, lekin ular o‘zaro ham bir-biriga ta’sir qiladi. Bunday sistemalar quyidagi holatlarda uchraydi:

1. Elektr zanjir (RLC kontur) modeli

x(t) — zaryad miqdori yoki tok,

y(t) — unga bog‘langan kuchlanish yoki boshqa tok

e^t — zanjirga ulangan tashqi kuch (masalan, kuchlanish manbai yoki tashqi elektromotor kuch)

Bu sistemadagi:

Doimiy koeffitsientlar (2, 3, 4) — elementlarning xossalari: qarshilik, induktivlik, sig‘im.

Bir jinsli bo‘lmagan a’zo e^t — bu tashqi kuch ta’siri, ya’ni energiya berilishi yoki tashqi tebranish manbai.

2. Tebranuvchi sistemalar (ikki massasimon obyekt)

x(t), y(t) — ikkita massaning holatlari (masalan, siljishlar),

Ular prujinalar orqali bog‘langan, birining harakati ikkinchisiga ta’sir qiladi,

Tashqi kuch (masalan, tashqi urinish yoki tebratuvchi kuch) — e^t Bu mexanik modelda sistemaning o‘z-o‘zini tebratish qobiliyati va tashqi kuchga javobi ko‘rib chiqiladi.