


**15-MAVZU: ELASTIK ELEMENT
(PRUJINA) VA OG'IRLIK SISTEMASI
ORQALI UMUMIY YECHIMLARNI
TAHLIL QILISH**

Reja

- ▶ Prujina–og‘irlik sistemasi: fizik model va asosiy qonunlar
 - ▶ So‘nmas tebranish tenglamasi va yechimi
 - ▶ So‘nuvchi tebranish tenglamasi va yechim turlari
 - ▶ Damping turlari: past, kritik, kuchli
 - ▶ Misollar
 - ▶ Nazorat savollari
- 

1. Prujina–og‘irlik sistemasi: fizik model

Fizik mazmuni

Massasi m bo‘lgan jism gorizontal yoki vertikal prujinaga ulangan bo‘lsin.

Prujina deformatsiyaga uchraganda Hooke qonuniga bo‘ysunadi:

$$F_{prujina} = -kx$$

bu yerda k — prujina qattiqligi, x — muvozanatdan siljish.

Agar tizimda ishqalanish bo‘lmasa → so‘nmas tebranish,

Agar ishqalanish bo‘lsa → so‘nuvchi tebranish.

2. So‘nmas tebranish

Ishqalanish kuchi yo‘q: $c=0$. Nyutonning ikkinchi qonuni:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Bu garmonik tebranish tenglamasi bo‘lib:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Umumiy yechim:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

yoki amplituda–fazali ko‘rinishda:

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Xususiyatlari:

▶ Amplituda o'zgarmaydi.

▶ Davri:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

3. So'nuvchi tebranish

Ishqalanish kuchi mavjud:

$$F_{ishqalanish} = -c \frac{dx}{dt}$$

Tenglama:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Yoki

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

bu yerda

$$\beta = \frac{c}{2m}$$

soʻnish koeffitsienti.

Xarakteristik tenglama:

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

Yechimlar β va ω_0 nisbatiga qarab farqlanadi:



4. Sunishning turlari

Past soʻnish

$$\beta < \omega_0$$

$$x(t) = e^{-\beta t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t))$$

bu yerda

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad - \text{soʻnuvchi tebranish chastotasi}$$

Tebranish mavjud, lekin amplituda vaqt oʻtishi bilan eksponensial kamayadi.

2) Kritik soʻnish

$$\beta = \omega_0$$

$$x(t) = e^{-\beta t} (A + Bt)$$

Tebranish yoʻq, tizim eng qisqa vaqtda muvozanatga keladi.

3) Kuchli soʻnish

$$\beta > \omega_0$$

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Tebranish boʻlmaydi, sekin muvozanatga keladi.

5. Misollarni qaraymiz

1-masala:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad k = 25 \frac{N}{m}, \quad c = 3 \frac{Ns}{m}$$

Boshlangʻich shartlar:

$$x(0) = 0,1 \text{ m}, \quad v(0) = 0.$$

Yechim:

$$\omega_0 = 5, \quad \beta = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$-\beta < \omega_0$$

$$\omega_d = \sqrt{25 - 2,25} \approx 4,77$$

Demak umumiy yechim:

$$x(t) = 0,1e^{-1,5t} \cos(4,77t)$$

2-misol (kritik soʻnish)

Berilgan:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad k = 4 \frac{N}{m}$$

Kritik soʻnish uchun:

$$b = 2\sqrt{mk} = 4$$

Tenglama:

$$x'' + 4x' + 4x = 0$$

Xarakteristik tenglama:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r + 2)^2 = 0$$

Umumiy yechim:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-2t}$$

Boshlang'ich shartlar:

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

1. $A = 1$

2. $x'(t) = Be^{-2t} - 2(A + Bt)e^{-2t}$

$$x'(0) = B - 2 = 0 \Rightarrow B = 2$$

Yakuniy yechim:

$$x(t) = (1 + 2t)e^{-2t}$$

Yuqoridagi misolga fizik izoh:

- ▶ Massa tebranmaydi
- ▶ Juda tez sekinlashib, muvozanatga keladi

3-misol (kuchli soʻnish)

Berilgan:

$$m = 1, \quad k = 1, \quad b = 4$$

$$\beta = 2, \quad \omega_0 = 1 \Rightarrow \beta > \omega_0$$

Tenglama:

$$x'' + 4x' + x = 0$$

Xarakteristik tenglama:

$$r^2 + 4r + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

Umumiy yechim:

$$x(t) = C_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}$$

Boshlang'ich shartlar:

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ (-2 + \sqrt{3})C_1 + (-2 - \sqrt{3})C_2 = 0 \end{cases}$$

Yechib:

$$C_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad C_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

Yakuniy yechim:

$$x(t) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} e^{(-2+\sqrt{3})t} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} e^{(-2-\sqrt{3})t}$$

Savollari

- ▶ Prujina–og‘irlik sistemasi uchun Hooke qonunini yozing.
- ▶ So‘nmas tebranish tenglamasining umumiy yechimi qanday?
- ▶ So‘nuvchi tebranishning uch turi qaysilar?
- ▶ Kritik damping fizik ma’noda nimani bildiradi?
- ▶ Underdamped tebranish grafigi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

