



**1-Mavzu: Oddiy differensial tenglamalar
nazariyasining asosiy tushunchalari**



Reja:

- Masalaning qo'yilishi
- Ta'riflar
- Birinchi tartibli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar
- Misollar

$y=f(x)$ funksiya biror hodisaning miqdoriy tomonini aks ettirsin. Ko‘pincha, biz bu hodisani tekshirishda y bilan x orasidagi bog‘lanish xarakterini bevosita belgilay olmaymiz, ammo x va y miqdorlar hamda x dan y bo‘yicha $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ olingan hosilalar orasidagi munosabatni belgilay olishimiz, ya‘ni differensial tenglama yozishimiz mumkin.

x va y o‘zgaruvchilar hamda hosilalar orasida topilgan bu munosabatlardan y bilan x orasidagi bog‘lanishni bevosita belgilash, ya‘ni $y=f(x)$ ni topish, yoki boshqacha aytganda, differensial tenglamani integrallash talab etiladi.

1-misol. Massasi m bo'lgan jism biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Agar jismga og'irlik kuchidan tashqari, havoning tezlikka proporsiyanal bo'lgan(proporsionallik koeffitsiyenti k) qarshilik kuchi ta'sir etsa, bu jismning tezligi v qanday qonun bilan o'zgarishini bilish, ya'ni $v=f(t)$ munosabatni topish talab etiladi.

Yechish: Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra, $m \frac{dv}{dt} = F$

Bunda $\frac{dv}{dt}$ harakatdagi jismning tezlanishi(tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosila), F esa jismga harakat yo'nalishida ta'sir etuvchi kuch bo'lib, u og'irlik kuchi mg dan va havoning qarshilik kuchi tezlikning yunalishiga teskari yunalgani uchun uni manfiy ishora bilan olamiz.

Shunday qilib,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (1)$$

Biz noma'lum v funksiya bilan uning $\frac{dv}{dt}$ hosilasi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi munosabatni, ya'ni nomalum v funksiyaga nisbatan differensial tenglama hosil qildik. Differensial tenglamani yechish – berilgan differensial tenglamani aynan qanoatlantiruvchi $v=f(t)$ funksiyani topish demakdir. Differensial tenglamani qanoatlantiruvchi bunday funksiyalar cheksiz ko'p. Har qanday

$$v = C e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2)$$

Ko‘rinishdagi funksiya C o‘zgarmas miqdor har qanday bo‘lganda ham (1) tenglamani qanoatlantirishini o‘quvchi osonlik bilan tekshirish mumkin. Bu funksiyalardan qaysi biri v ning t orqali izlanayotgan munosabatini beradi. Buni topish uchun qo‘shimcha shartdan foydalanamiz: jismni tashlab yuborishda unga boshlang‘ich v_0 tezlik berilgan edi (u xususiy holda nolga teng bo‘lishi ham mumkin); biz bu boshlang‘ich tezlikni ma’lum deb faraz qilamiz. Ammo bu holda izlanayotgan $v=f(t)$ funksiya shunday bo‘lishi kerakki,

uning uchun $t=0$ bo'lganda (harakat boshlanishida) $v = v_0$
shart bajarilishi kerak. (2) formulaga $t=0$, $v = v_0$ ni
qo'yamiz:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k}.$$

Bundan

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Shunday qilib, C o'zgarmas miqdor topildi. Demak, v
bilan t orasidagi izlanayotgan bog'lanish:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}. \quad (2')$$

Agar $k=0$ bo'lsa (ya'ni havoning qarshiligi yo'q yoki e'tiborga olmaydigan darajada kichik bo'lsa), u holda fizikadan ma'lum bo'lgan

$$v = v_0 + gt \quad (2'')$$

Formulani hosil qilamiz. Topilgan v funksiya differensial tenglamani va $t=0$ bo'lganda boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$v = v_0$$

Ta'riflar

1-ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi x noma'lum $y=f(x)$ funksiya va uning $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan tenglamaga aytiladi. Differensial tenglamani quyidagicha belgilashlar yordamida ifodalash mumkin:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{yoki} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

Agar izlanayotgan $y=f(x)$ funksiya bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama oddiy differensial tenglama bo'ladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaning tartibi deb tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Masalan, $y' - 2xy^2 + 5 = 0$

tenglama birinchi tartibli differensial tenglamadir.

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0$$

tenglama esa ikkinchi tartibli differensial tenglamadir.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan harqanday $y=(x)$ funksiyaga aytiladi.

1-misol. $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$
tenglama berilgan bo'lsin.

$y = \sin x, y = 2 \cos x, y = 3 \sin x - \cos x$ funksiyalar, umuman

$y = C_1 \sin x, y = C_2 \cos x$ yoki $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

ko'rinishdagi funksiyalar C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarning har qanday qiymatlarida ham berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'ladi, buning to'g'riligini ko'rsatilgan funksiyalarni berilgan tenglamaga qo'yib ko'rib, ishonish mumkin.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar

1. Birinchi tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar bu tenglamani y' ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, uni

$$y' = f(x, y) \quad (1')$$

ko'rinishda yozish mo'mkin.

Bu holda biz differensial tenglama hosilaga nisbatan yechilgan deymiz. Bunday tenglama uchun quyidagi teorema o'rinli bo'lib, bu teorema differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema deyiladi.

Teorema. Agar $y' = f(x, y)$ tenglamada $f(x, y)$ funksiya va uning y bo'yicha olingan $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilasi xOy tekislikdagi (x_0, y_0) nuqtani o'z ichiga oluvchi biror D sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina $y=f(x)$ funksiyaning mavjud ekanini bildiradi.

Hozirgina bayon qilingan teoremadan (1') tenglama cheksiz ko'p turli yechimlarga ega ekanligi kelib chiqadi (masalan, agar $(x_0, y_0), (x_0, y_1), (x_0, y_2)$ va hokazo nuqtalar D sohada yotsa, grafigi (x_0, y_0) nuqtadan o'tadigan yechim, grafigi (x_0, y_1) nuqtadan o'tadigan boshqa yechim, grafigi (x_0, y_2) nuqtadan o'tadigan yechim va hokazo).

$x = x_0$ bo'lganda y funksiya berilgan y_0 songa teng bo'lishi kerak degan shart boshlang'ich shart deyiladi. Bu shart ko'pincha $y|_{x=x_0} = y_0$ ko'rinishda yoziladi.

1-ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb bitta ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga bog'liq bo'lgan hamda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$y = \phi(x, C) \quad (1)$$

funksiyaga aytiladi:

a) Bu funksiya differensial tenglamani C o'zgarmas miqdorning konkret olingan har qanday qiymatida ham qanoatlantiradi.

b) $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ yana $y'|_{x=x_0} = y_0'$ boshlang'ich shart har qanday bo'lganda ham C miqdorning $C = C_0$ shunday qiymatini topish mumkinki, $y = \phi(x, C_0)$ funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

Bunda x_0 va y_0 qiymatlar x va y o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasining yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning shartlari bajariladigan qismiga tegishli deb faraz qilinadi.

2. Biz differensial tenglamaning umumiy yechimini izlashda ko'pincha y ga nisbatan yechilmagan

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2')$$

ko'rinishdagi munosabatga kelib qolamiz. Bu munosabatni y ga nisbatan yechsak, umumiy yechimni hosil qilamiz. Ammo y ni (2')

munosabatdan foydalanib elementar funksiyalar bilan ifoda etish hamma vaqt ham mumkin bo'lavermaydi;

bunday hollarda umumiy yechim oshkormas ko'rinishda qoldiriladi.

Umumiy yechimni oshkormas holda ifodalovchi $\Phi(x, y, C) = 0$ ko'rinishdagi tenglik differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

2-ta'rif. Ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga ma'lum $c = c_0$ qiymat berish natijasida $y = \varphi(x, C)$ umumiy yechimdan hosil bo'ladigan har qanday $y = \varphi(x, c_0)$ funksiya xususiy yechim deb ataladi. Bu holda $\Phi(x, y, C_0) = 0$ munosabat tenglamaning xususiy integrali deyiladi.

Differensial tenglamani *yechish* yoki boshqacha aytganda, *integrallash* deganda:

- ▶ uning umumiy yechimini yoki umumiy integralini (agar boshlang'ich shartlar berilgan bo'lmasa) topish yoki
- ▶ berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (agar bunday shartlar mavjud bo'lsa) xususiy yechimni topishni tushinish kerak.

► 1-misol.

Egri chiziqlar oilasi:

$$y = Cx^2$$

Differensial tenglamani tuzing.

► Yechish:

1) hosila olinadi: $y' = 2Cx$

2) $c = \frac{y}{x^2}$ yoki hosiladan $c = \frac{y'}{2x}$ topiladi.

3) Topilgan C larni tenglashtiramiz

$$\frac{y}{x^2} = \frac{y'}{2x}, \quad 2y = xy'$$

Bu birinchi tartibli differensial tenglamadir