2-Mavzu: O‘zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Reja:

- O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar.
- Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar
- Bir jinsli tenglamaga keladigan tenglamalar
- Misollar yechish

O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar.

O‘ng tomoni faqat x ga bog’liq bo‘lgan funksiya bilan faqat y ga bog’liq bo‘lgan funksiyaning ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamani qaraylik. Bu tenglamani quyidagicha o‘zgartirib ($f_2(y) \neq 0$ deb faraz qilib) yozamiz:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \qquad (1')$$

y ni x ning ma’lum funksiyasi deb hisoblab $(1')$ tenglikni ikkita differensialning tengligi deb qarash mumkin; ulardan olingan aniqmas integrallar bir-biridan o‘zgarmas qo‘shiluvchi bilan farq qiladi.

$(1')$ tenglikni chap tomonini y bo‘yicha, o‘ng tomonini x bo‘yicha integrallasak,

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C$$

hosil bo‘ladi. Biz y yechim, x erkli o‘zgaruvchi va ixtiyoriy C o‘zgarmas miqdorni bog’lovchi munosabatni, ya’ni (1) tenglamaning umumiy integralini xosil qildik.

$(1')$ differensial tenglama tipidagi

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (2)$$

tenglama *o‘zgaruvchilari ajralgan* differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning umumiy integrali yuqorida isbot qilganimizga ko‘ra:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

1-misol. O‘zgaruvchilari ajralgan

$$xdx + ydy = 0$$

tenglama berilgan.

Buni integrallasak,

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

umumiy integralni hosil qilamiz. Keying tenglikning chap tomoni manfiy bo‘lmagani uchun, uning o‘ng tomoni ham manfiy emas.

$2C_1$ ni C^2 bilan belgilasak, $x^2 + y^2 = C^2$

Bu markazi koordinata boshida va radiusi C bo‘lgan konsentrik aylanalar oilasining tenglamasidir.

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglama *o‘zgaruvchilari ajraladigan* differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning ikkala tomonini $M_2(x)N_1(y)$ ifodaga bo‘lish yo‘li bilan uni o‘zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltirish mumkin:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{M_2(x)N_1(y)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{M_2(x)N_1(y)}dy = 0$$

yoki

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

ya’ni biz (2) ko‘rinishdagi tenglamani hosil qildik.

2-misol.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

tenglama berilgan.

O‘zgaruvchilarini ajratib, integrallasak:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

ya’ni

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$$

yoki

$$\ln|y| = -\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

tenglik hosil bo‘ladi; bundan $y = \frac{C}{x}$ umumiy integralni topamiz:

yuqoridagidan

$$\frac{(1+x)}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$$

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0.$$

Munosabatni hosil qilamiz.

Keying munosabat berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

3-misol. Ma’lum bo‘lishicha har ber berilgan momentda radiyning yemirilish tezligi uning miqdoriga to‘g’ri proporsianaldir. Agar t=0 bo‘lganda radiyning massasi m_0 bo‘lsa, radiy massasining vaqtga qarab o‘zgarish qonuni aniqlansin.

Yechish. Yemirilish tezligi quyidagicha aniqlanadi, t vaqtda radiyning massasi m, $t+\Delta t$ vaqtda esa $m+\Delta m$ bo‘lsin Δt, nuqta radiyning Δm qadar massasi yemirilgan bo‘ladi. $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ nisbat yemirilishning o‘rtacha tezligini bildiradi. $\Delta t \to 0$ da bu nisbatning nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

t vaqtda radiyning yemirilish tezligi deyiladi.

Masalaning shartiga ko‘ra

$$\frac{dm}{dt} = -km \qquad (4)$$

bunda k proporsionallik koeffitsienti k>0 bu yerda minus ishora vaqt o‘sishi bilan radiyning miqdori kamaygani uchun olindi $\left(\frac{dm}{dt} < 0\right)$.

(4) tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dm}{dt} = -kdt$$

tenglamani yechamiz:

$$\ln m = -kt - \ln C.$$

Bundan

$$\ln \frac{m}{C} = -kt, \quad m = Ce^{-kt} \qquad (5)$$

t=0 bo‘lganda radiyning massasi m_0 bo‘lgani uchun C

$$m_0 = Ce^{-k_0} = C$$

Munosabatni qanoatlantirishi kerak. C ning qiymatini (5) tenglikka qo‘yib, radiy massasini vaqtning vaqtning funksiyasi kabi ifodalovchi izlanayotgan munosabatni topamiz:

$$m = m_0 e^{-kt} \qquad (6)$$

k koeffitsient kuzatishlardan quyidagicha aniqlanadi.

t_0 vaqtda radiy dastlabki massasining α foizi parchalangan bo‘lsin. Demak

$$\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)m_0 = m_0 e^{-kt}$$

munosabat bajariladi. Bu munosabatdan

$$-kt_0 = \ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right),$$

yoki

$$k = -\frac{1}{t_0}\ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right),$$

Shunday qilib, radiy uchun $k = 0{,}00044$ ekani aniqlangan edi (vaqtning o‘lchov birligi yil hisobida olinadi).

k ning bu qiymatini (6) formulaga qo‘ysak,

$$m = m_0 e^{-0,00044\,t}.$$

Radiyning yarim parchalanish davrini, ya’ni radiyning dastlabki massasining yarmini parchalanishi uchun ketadigan vaqtni topamiz. Keyingi formulada m ning o‘rniga $\frac{m_0}{2}$ ni qo‘yib, yarim parchalanish davri T ni topish uchun tenglama hosil qilamiz:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0,00044\,T},$$

Bundan

$$-0{,}00044\,T = -\ln 2,$$

yoki

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}00044} = 1590 \quad yil\,.$$

Izoh.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad yoki \quad dy = f(x)dx$$

tenglama eng sodda ko‘rinishdagi o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamadir. Buning umumiy integrali

$$y = \int f(x)dx + C$$

ko‘rinishda bo‘ladi.