3-mavzu: Chiziqli differensial tenglamalar va unga keladigan tenglamalar. Bernulli tenglamasi.

Reja:

- Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar
- Bernulli tenglamasi
- Misollar yechish

Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar

Ta'rif. Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan tenglamaga aytiladi. U

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda P(x) va Q(x) lar x ning berilgan uzliksiz funksiyalari(yoki o'zgarmas sonlar).

(1)chiziqli tenglamani yechish. (1) tenglamani yechimini x ning ikkita funksiyasi ko'paytmasi shaklida izlaymiz:

$$y = u(x)v(x). \qquad (2)$$

Bu funksiyalardan birini ixtiyoriy olish mumkin, ikkinchisini esa (1) tenglamaga asosan aniqlanadi.

(2)tenglikning ikkala tomonini differensiallaymiz;

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx}$ hosilaning topilgan ifodasini (1) tenglamaga qo‘yamiz:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v + Puv = Q$$

yoki

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q. \qquad (3)$$

v funksiyani

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0 \qquad (4)$$

tenglama o‘rinli bo‘ladigan qilib tanlaymiz. Bu differensial tenglamada o‘zgaruvchularni v ga nisbatan ajratamiz:

$$\frac{dv}{v} = -Pdx .$$

Buni integrallaymiz:

$$-\ln C_1 + \ln v = -\int Pdx$$

yoki

$$v = C_1 e^{-\int Pdx} .$$

(4) tenglamaning noldan farqli biror yechimini topish yetarli bo‘lgani uchun v(x) funksiya deb

$$v(x) = e^{-\int P dx} \qquad (5)$$

ni olishimiz mumkin, bunda $\int P dx$ biror boshlang’ich funksiya. Bu yerda $v(x) \neq 0$ v(x) ning topilgan qiymatini (3) tenglamaga qo‘yib ($\frac{dv}{dx} + Pv = 0$ ekanligini etiborga olib),

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x)$$

yoki

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

tenglamani hosil qilamiz, bundan

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

ekani kelib chiqadi. u ning bu qiymatini (2) formulaga qo‘ysak, natijada

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C\right]$$

yoki

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + Cv(x) \qquad (6)$$

hosil bo‘ladi.

Izoh. Agar (5) tenglik yordamida aniqlangan $v(x)$ funksiya o‘rniga biror $v_1(x) = \overline{C}v(x)$ funksiya olsak, (6) ifodaning o‘zgarmasligi ravshan. Haqiqatan ham, (6) tenglikdagi $v(x)$

o‘rniga $v_1(x)$ qo‘ysak,

$$y = \overline{C} v(x) \int \frac{Q(x)}{\overline{C} v(x)} dx + C\overline{C} v(x)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Birinchi qo‘shiluvchidagi $\overline{C}$ qisqarib ketadi; ikkinchi qo‘shiluvchidagi $C\overline{C}$ ko‘paytma ixtiyoriy o‘zgarmas sondir, uni bitta C harfi bilan belgilasak, biz yana (6) ifodaga kelamiz. Agar $\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = \varphi(x)$ deb belgilasak, (6) ifoda

$$y = v(x)\varphi(x) + Cv(x) \qquad (6')$$

ko‘rinishni oladi. Bu umumiy integral bo‘ladi, chunki C ning quyidagi $x = x_0$ bo‘lganda $y = y_0$ boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi qiymatini tanlab olish mumkin. C ning bunday qiymati

$$y_0 = v(x_0)\varphi(x_0) + Cv(x_0)$$

tenglikdan aniqlanadi.

1-misol.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

tenglama yechilsin.

Yechish.

$$y = uv$$

deb faraz qilsak, $\frac{dy}{dx}$ hosila uchun

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$$

ifoda hosil bo‘ladi, $\frac{dy}{dx}$ hosilaning ifodasini berilgan tenglamaga qo‘ysak, u

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$$

$$u(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v) + \frac{du}{dx}v = (x+1)^3 \qquad (7)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. v ni aniqlash uchun

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0$$

ya’ni

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

yoki

$$\ln v = 2\ln(x+1)$$

$$v = (x+1)^2$$

v funksiyaning topilgan bu ifodasini (7) tenglamaga qo‘ysak, u ni topish uchun

$$(x+1)^2\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

yoki

$$\frac{du}{dx} = x+1$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Topilgan bu oila berilgan tenglamaning umumiy yechimidir. $(x_0; y_0)$ boshlang’ich shart har qanday bo‘lganda ham (bunda $x_0 \neq -1$) hamma vaqt C ni mos xususiy yechim boshlang’ich shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olish mumkin. Masalan, $x_0 = 0$

bo‘lganda, $y_0 = 3$ boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechim quyidagicha topiladi:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2, \quad C = \frac{5}{2}.$$

Demak, izlanayotgan xususiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2$$

Agar $(x_0; y_0)$ boshlang’ich shartni $x_0 = -1$ bo‘ladigan qilib tanlab olinsa $x_0 = -1$ bo‘lganda $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ funksiyani uzilishga ega bo‘lishi va demak, yechim mavjudlik teoremasining sharti bajarilmasligi sababli biz bu boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topa olmaymiz.

Bernulli tenglamasi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamani qaraymiz, bunda $P(x)$ va $Q(x)$

x ning uzluksiz funksiyalari (yoki o‘zgarmas miqdorlar) hamda

$n \neq 0$ va $n \neq 1$ (aks holda chiziqli tenglama hosil bo‘lgan bo‘lar edi).

Bernulli tenglamasi deb atalgan bu tenglama quyidagi almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Tenglamaning barcha xadlarini y^n ga bo‘lamiz:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x) \qquad (2)$$

Endi

$$z = y^{-n+1}$$

almashtirishni bajaramiz. U holda

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n+1}\frac{dy}{dx}.$$

topilganlarni (2) tenglamaga qo‘ysak,

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan bu tenglama chiziqli tenglamadir.

Buning umumiy integralini topib hamda z o‘rniga y^{-n+1} ifodani qo‘yib, Bernulli tenglamasining umumiy integralini topamiz.

4-misol.

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$$

tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning hamma hadlarini y^3 ga bo‘lsak,

$$y^{-3} y' + xy^{-2} = x^3 \qquad (4)$$

tenglama hosil bo‘ladi.

$z = y^{-2}$ deb olsak,

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

bo‘ladi. Topilganlarni (4) tenglamaga qo‘ysak,

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3 \qquad (5)$$

Chiziqli tenglamaga ega bo‘lamiz:

Bu tenglamaning umumiy integralini topamiz:

$$z = uv; \quad \frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v.$$

z va $\dfrac{dz}{dx}$ larning ifodalarini (5) tenglamaga qo‘yamiz:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - 2xuv = -2x^3$$

yoki

$$u\left(\frac{dv}{dx}-2xv\right)+v\frac{du}{dx}=-2x.$$

Qavs ichidagi ifodani nolga tenglaymiz;

$$\frac{dv}{dx}-2xv=0;\quad \frac{dv}{v}=2xdx;\quad \ln v=x^2;\quad v=e^{x^2}.$$

u ni aniqlsh uchun

$$e^{x^2}\frac{du}{dx}=-2x^3$$

tenglamani hosil qilamiz:

O‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$du=-2e^{-x^2}x^3dx,\qquad u=-2\int e^{-x^2}x^3dx+C$$

Bo‘laklab integrallash yordamida

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C; \qquad z = uv = x^2 + 1 + Ce^{-x^2}$$

tenglikni topamiz. Demak,

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{-x^2}, \quad yoki \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{-x^2}}}$$

Berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

Izoh. Chiziqli tenglamalarni yechgandagidek Bernulli tenglamasining yechimini ham ikkita funksiya ko‘paytmasi, ya’ni

$$y = u(x)v(x)$$

Ko‘rinishda izlash mumkinligini ko‘rsatsa bo‘ladi, bunda $v(x)$ funksiya

$v' + Pv = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi, noldan farqli biror funksiya.

- 5-misol. Bernulli tenglamasini yeching: $y' - xy = -xy^3.$

Yechish. Tenglamani ikkala tomonini y^3 ga bo’lamiz:

$$\frac{y'}{y^3} - x\frac{1}{y^2} = -x.$$

Keyin $\frac{1}{y^2} = z, -\frac{2y'}{y^3} = z'$ almashtirish bajaramiz. Bundan esa $\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}z'$ topamiz. O’rniga qo’yishlardan so’ng, oxirgi tenglama chiziqli tenglamaga aylanadi.

$$-\frac{1}{2}z' - xz = -x \quad \text{yoki} \quad z' + 2xz = 2x.$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$z = 1 + Ce^{-x^2}$$

teng. Bundan berilgan tenglamani umumiy integralini

$$\frac{1}{y^2} = 1 + Ce^{-x^2} \quad \text{yoki} \quad y^2(1 + Ce^{-x^2}) = 1$$

topamiz.

Izoh. Bernulli tenglamasi ham ozgarmasni variosiyalash usuli va chiziqli tenglamalar kabi $y(x) = u(x)v(x)$ o‘rniga qo‘yish usuli yordamida ham integrallanishi mumkin.