# 5-mavzu: Birinchi tartibli tenglama uchun Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi

## Reja:

1) Birinchi tartibli tenglama uchun Koshi masalasi.
2) Yechimning mavjudligi va yagonaligi
3) Ketma-ket yaqinlashishlarning tekis yaqinlashuvchiligi.
4) Misollar yechish

Differensial tenglamaning berilgan $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlangich shart bo‘yicha xususiy yechimini topish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

$y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang’ich shartning berilishi izlanayotgan xususiy yechimga mos integral egri chiziq utishi kerak bo‘lgan

$P_0(x_0, y_0)$ nuqtaning berilishini bildiradi. Shunday qilib, Koshi masalasini yechish — integral egri chiziqlar oilasi orasidan berilgan nuqtadan utadiganini tanlab olish demakdir. Bu masala har doim ham yechimga egami? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi (isbotni keltirmay, quyidagi teoremani aytib o‘tamiz).

**Teorema.** (Koshi masalasi yechimning mavjudligi va yagonaligi). Agar $f(x,y)$ funksiya va uning $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilasi $P(x_0, y_0)$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror D Sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda $y' = f(x,y)$ differensial tenglamaning $x = x_0$ $da$ $\varphi(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ yechimi mavjud va yagonadir.

Bu geometrik jihatdan quyidagini bildiradi: teoremaning shartlari bajariladigan har bir nuqta orqali yagona integral egri chiziq o‘tadi.

Teoremaning shartlari buziladigan nuqtalar maxsus nuqtalar deyiladi. Maxsus nuqtalar orqali, yo birorta ham integral egri chiziq o‘tmaydi, yo bir nechta chiziq o‘tadi.

Masalan, $y' = \frac{y}{x}$ tenglama $y = Cx$ umumiy yechimga ega, bu integral egri chiziq oilasi koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar dastasidir $x = 0$ da (ordinatalar o‘qida) va $O(0,0)$ nuqtada teorema sharti buziladi. Tekislikning, ko‘rsatilgan nuqtalaridan tashqari, istalgan nuqtasi orqali $y = Cx$ oilaning bir to‘g’ri chizig’i o‘tadi. Teorema sharti buzilgan $O(0,0)$ nuqta orqali cheksiz ko‘p to‘g’ri chiziq o‘tadi. $Oy$ o‘qining boshqa nuqtalari orqali bitta ham to‘g’ri chiziq o‘tmaydi.

Bu misolda $O(0,0)$ nuqta tugun deyiladi. Bunday holda har bir integral egri chiziq maxsus nuqtada o‘z yunalishiga ega bo‘ladi.

$y' = \frac{2y}{x}$ tenglamani ham tekshiraylik. Uning umumiy yechimi $y = Cx^2$ dan iborat.

Integral egri chiziqlari ana shunday joylashgan differensiyal tenglamaning maxsus nuqtasi tugun deyiladi.

$y' = -\frac{y}{x}$ tenglama uchun umumiy integral $xy = C$ dan, ya’ni asimtotalari koordinata o‘qlaridan iborat bo‘lgan giperbolalar oilasidan iborat.

Xususiy holda, C=0 da x=0 va y=0 (koordinatalar o‘qlari) ni hosil qilamiz. Bu integral egri chiziqlar koordinatalar boshidan o‘tadi, qolgan hamma chiziqlar esa maxsus nuqta orqali o‘tmaydi.

Bu turdagi maxsus nuqta egar deyiladi.

$y' = \frac{x+y}{x-y}$ differensiyal tenglama esa $y = ux$ o‘rniga qo‘yish natijasida

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

ko‘rinishga keladi, bu yerdan o‘zgaruvchilarni ajratib, integrallasak:

$$\ln C + arctgu - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x$$

yoki

$$x\sqrt{1+u^2} = Ce^{arctgu}$$

Eski o‘zgaruvchilarga qaytsak,

$$\sqrt{1+u^2} = Ce^{arctg\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Qutib koordinatalarga $(x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi)$ o‘tib, oxirgi yechimni $\rho = Ce^{\varphi}$ ko‘rinishga keltiramiz. Bu koorduinatalar boshi atrofida cheksiz sondagi $(\varphi = -\infty\ \ da\ )$ o‘ramlar hosil qiluvchi logarifmik spirallar oilasidir.

Bunday maxsus nuqta fokus deb ataladi.

Nihoyat $y' = -\frac{x}{y}$ tenglamani qaraylik. Bu tenglamaning umumiy yechimi $x^2 + y^2 = C^2$ ni, ya'ni markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylanalar oilasini beradi. Maxsus nuqta orqali bitta ham integral egri chiziq o'tmaydi. Bunday maxsus nuqta markaz deyiladi.